

А.Г. Москаленко М.Н. Гаршина И.А. Сафонов  
Т.Л. Тураева А.В. Бугаков

## КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ

Часть 2

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА.  
КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.  
ФИЗИКА ЯДРА

Учебное пособие

Воронеж 2011

ФГБОУ ВПО "Воронежский  
государственный технический университет "

А.Г. Москаленко М.Н. Гаршина И.А. Сафонов  
Т.Л. Тураева А.В. Бугаков

## КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ

Часть 2

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА.  
КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.  
ФИЗИКА ЯДРА

Утверждено Редакционно-издательским советом  
университета в качестве учебного пособия

Воронеж 2011

УДК 3;530.1

Краткий курс физики. Ч.2: Электромагнетизм. Колебания и волны. Оптика. Квантовая физика. Физика ядра: учеб. пособие / А.Г. Москаленко, М.Н. Гаршина, И.А. Сафонов, Т.Л. Тураева, А.В. Бугаков. Воронеж: ФГБОУ ВПО “Воронежский государственный технический университет”, 2011, 234. с.

В учебном пособии кратко изложен теоретический материал, соответствующий учебной программе курса физики за 2011 год для заочной сокращённой формы обучения по электромагнитным явлениям, механическим и электрическим колебаниям, волновой и квантовой оптике, основам квантовой механики и физики твёрдого тела, основам физики ядра. Приведены примеры решения типовых задач с подробным описанием методов решения. По каждому из разделов предложен фонд контрольных заданий с таблицами вариантов контрольных работ.

Издание соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для всех специальностей технического профиля.

Учебное пособие подготовлено в электронном виде в тестовом редакторе MS Word 2003 и содержится в файле **Физика ч.2.doc**.

Предназначено для студентов технических специальностей сокращённой заочной формы обучения.

Рецензенты: кафедра общей физики ВГПУ

(зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф.

В.А.Хоник);

д-р физ.-мат. наук, проф. А.А. Щетинин

© Москаленко А.Г., Гаршина М.Н.,  
Сафонов И.А., Тураева Т.Л.,  
А.В. Бугаков. 2011

© Оформление. ФГБОУ ВПО  
“Воронежский государственный  
технический университет”, 2011

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие, являющееся продолжением первой части [1] курса общей физики и включает разделы: электромагнетизм, колебания и волны, волновая и квантовая оптика, квантовая механика, физика атома и ядра.

Теоретический материал излагается в соответствии с типовой программой по курсу общей физики. Главное внимание при этом обращается на физическую сущность основных понятий и законов. Наряду с теоретическими основами в пособии рассматриваются практические приёмы решения типовых задач. По каждому из разделов представлен фонд контрольных заданий с таблицами вариантов контрольных работ. В конце пособия в виде приложения даются некоторые сведения из математики, а также основные справочные данные.

### **Выписка из типовой программы дисциплины Физика за 2011 год (2 семестр) 1. Магнетизм**

#### **Магнитостатика.**

Магнитное взаимодействие постоянных токов. Вектор магнитной индукции. Закон Ампера. Сила Лоренца. Движение зарядов в электрических и магнитных полях. Закон Био-Савара-Лапласа. Теорема о циркуляции (закон полного тока).

#### **Магнитное поле в веществе.**

Магнитное поле и магнитный дипольный момент кругового тока. Намагничивание магнетиков. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость. Классификация магнетиков.

#### **Электромагнитная индукция.**

Феноменология электромагнитной индукции. Правило Ленца. Уравнение электромагнитной индукции. Самоиндук-

ция. Индуктивность соленоида. Работа по перемещению контура с током в магнитном поле. Энергия магнитного поля.

### **Уравнения Максвелла.**

Система уравнений Максвелла в интегральной форме и физический смысл входящих в нее уравнений.

## **2. Колебания и волны. Оптика.**

### **Гармонические колебания.**

Идеальный гармонический осциллятор. Уравнение идеального осциллятора и его решение. Амплитуда, частота и фаза колебания. Энергия колебаний. Примеры колебательных движений различной физической природы. Свободные затухающие колебания осциллятора с потерями. Вынужденные колебания. Сложение колебаний (биения, фигуры Лиссажу). Анализ и синтез колебаний, понятие о спектре колебаний. Связанные колебания.

### **Волны.**

Волновое движение. Плоская гармоническая волны. Длина волны, волновое число, фазовая скорость. Уравнение волны. Одномерное волновое уравнение. Упругие волны в газах, жидкостях и твердых телах. Элементы акустики. Эффект Доплера. Поляризация волн.

### **Интерференция волн.**

Интерференционное поле от двух точечных источников. Опыт Юнга. Интерферометр Майкельсона. Интерференция в тонких пленках. Стоячие волны.

### **Дифракция волн.**

Принцип Гюйгенса-Френеля. Дифракция Френеля на простейших преградах. Дифракция Фраунгофера. Дифракционная решетка как спектральный прибор. Понятие о голографическом методе получения и восстановления изображений.

### **Поляризация волн.**

Форма и степень поляризации монохроматических волн. Получение и анализ линейно-поляризованного света. Линейное двулучепреломление. Прохождение света через

линейные фазовые пластинки. Искусственная оптическая анизотропия. Фотоупругость. Электрооптические и магнитооптические эффекты.

**Поглощение и дисперсия волн.**

**Нелинейные процессы в оптике.**

### **3. Квантовая физика.**

**Квантовые свойства электромагнитного излучения.**

Тепловое излучение и люминесценция. Спектральные характеристики теплового излучения. Законы Кирхгофа, Стефана-Больцмана и закон смещения Вина. Абсолютно черное тело. Формула Релея-Джинса и «ультрафиолетовая катастрофа». Гипотеза квантов. Формула Планка. Квантовое объяснение законов теплового излучения. Корпускулярно-волновой дуализм света.

**Планетарная модель атома.**

Модель атома Томсона. Опыты Резерфорда по рассеянию альфа-частиц. Ядерная модель атома. Эмпирические закономерности в атомных спектрах. Формула Бальмера.

**Элементы квантовой механики.**

Гипотеза де Бройля. Опыты Дэвиссона и Джермера. Дифракция микрочастиц. Принцип неопределенности Гейзенберга. Волновая функция, ее статистический смысл и условия, которым она должна удовлетворять. Уравнение Шредингера. Квантовая частица в одномерной потенциальной яме. Одномерный потенциальный порог и барьер.

**Квантово-механическое описание атомов.**

Стационарное уравнение Шредингера для атома водорода. Волновые функции и квантовые числа. Правила отбора для квантовых переходов. Опыт Штерна и Герлаха. Эффект Зеемана.

**Оптические квантовые генераторы.**

Спонтанное и индуцированное излучение. Инверсное заселение уровней активной среды. Основные компоненты лазера. Условие усиления и генерации света. Особенности лазерного излучения. Основные типы лазеров и их

применение.

## **Ядерная физика.**

### **Основы физики атомного ядра.**

Состав атомного ядра. Характеристики ядра: заряд, масса, энергия связи нуклонов. Радиоактивность. Виды и законы радиоактивного излучения. Ядерные реакции. Деление ядер. Синтез ядер. Детектирование ядерных излучений. Понятие о дозиметрии и защите.

### **Элементарные частицы.**

Фундаментальные взаимодействия и основные классы элементарных частиц. Частицы и античастицы. Лептоны и адроны. Кварки. Электрослабое взаимодействие.

### **Физическая картина мира.**

Особенности классической и неклассической физики. Методология современных научно-исследовательских программ в области физики. Основные достижения и проблемы субъядерной физики. Попытки объединения фундаментальных взаимодействий и создания «теории всего». Современные космологические представления. Достижения наблюдательной астрономии. Теоретические космологические модели. Антропный принцип. Революционные изменения в технике и технологиях как следствие научных достижений в области физики. Физическая картина мира как философская категория. Парадигма Ньютона и эволюционная парадигма.

## **1. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ**

### **1.1. Магнитная индукция движущегося заряда.**

#### **Взаимодействие движущихся зарядов. Сила Лоренца**

Движущийся заряд создает в окружающем его пространстве помимо электрического еще и магнитное поле, существование которого обусловлено релятивистскими свойствами пространства и времени. Силовой характеристикой

магнитного поля является **вектор магнитной индукции**  $\vec{B}$ . В результате обобщения экспериментальных данных был получен закон, определяющий индукцию  $\vec{B}_q$  поля точечного заряда, движущегося с постоянной нерелятивистской скоростью

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}\vec{r}]}{r^3}, \text{ или } B_q = \frac{\mu_0 q v \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{r}$  - радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения,  $\mu_0$  - магнитная постоянная.

Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , образуя тройку векторов правой ориентации (рис.1.1). Величина  $B_q$  обратно пропорциональна  $r^2$ , максимальна в направлении перпендикулярном скорости заряда, и равна нулю в направлении, совпадающим с направлением движения заряда. Линии индукции магнитного поля  $\vec{B}_q$  являются замкнутыми окружностями, “нанизанными” на ось, определяемую вектором  $\vec{v}$  (рис.1.2).

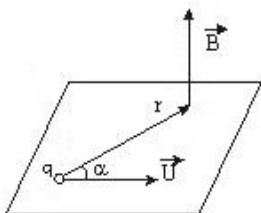


Рис.1.1

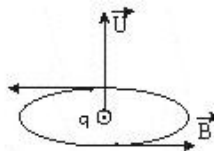


Рис.1.2

Силу взаимодействия двух движущихся электрических зарядов можно разделить на две составляющие – **электрическую и магнитную**.

Электрическая составляющая не зависит от движения зарядов и описывается законом Кулона

$$\vec{F}_{эл} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r} = q_1 \vec{E}_2, \quad (1.2)$$



где  $\vec{E}_2$  - вектор напряженности электрического поля, создаваемого вторым зарядом. Магнитная составляющая, зависящая от скорости электрического заряда, имеет следующий вид

$$\vec{F}_m = q_1 [\vec{v}, \vec{B}_2], \quad (1.3)$$

где  $\vec{B}_2$  - магнитная индукция, обусловленная зарядом  $q_2$ .

Следовательно, полная сила взаимодействия между движущимися зарядами определяется выражением

$$\vec{F} = q_1 \vec{E}_2 + q_1 [\vec{v}, \vec{B}_2]. \quad (1.4)$$

Обобщая эту формулу, можно считать, что **на электрический заряд, движущийся в электрическом  $\vec{E}$  и магнитном  $\vec{B}$  полях, действует сила**

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (1.5)$$

Эту силу называют **силой Лоренца**.

Выражение для магнитной составляющей силы Лоренца может быть использовано для установления физического смысла и единицы измерения магнитной индукции. Из формулы

$$F_m = qvB \sin \alpha$$

следует, что индукция  $B$  численно равна силе, которая действует на единичный положительный заряд, движущийся перпендикулярно вектору  $\vec{B}$  со скоростью, равной единице:

$$B = \frac{F}{qv_x}, \quad [B] = \frac{H}{\text{Кл м/с}} = \text{Тл}.$$

Единица измерения магнитной индукции называется **Тесла (Тл)**.

## **1.2. Закон Био – Савара - Лапласа и его применение к расчёту магнитного поля прямого и кругового токов**

Используя выражение (1.1) для индукции поля движущегося заряда, выведем формулу для индукции поля элемента

тока.

Пусть магнитное поле создается произвольным тонким проводником, по которому течет ток  $I$  (рис.1.3). Выделим элемент проводника  $dl$ . Число носителей тока в данном элементе равно

$$dN = nSdl, \quad (1.6)$$

где  $n$  – концентрация носителей, а  $S$  – площадь сечения проводника.

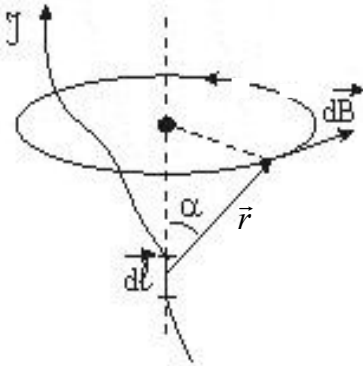


Рис.1.3

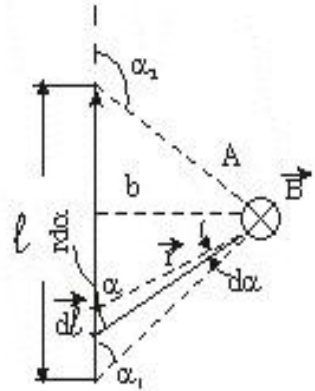


Рис.1.4

Каждый носитель тока создает магнитное поле, индукция которого в некоторой точке А определяется выражением

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\langle \vec{v} \rangle \vec{r}]}{r^3}, \quad (1.7)$$

где  $\langle \vec{v} \rangle$  - средняя скорость упорядоченного движения носителей тока,  $\vec{r}$  - вектор, соединяющий  $d\vec{l}$  с точкой А.

Поле, создаваемое элементом тока  $dl$ , будет равно

$$d\vec{B} = \vec{B}_q dN = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qnSdl[\langle \vec{v} \rangle, \vec{r}]}{r^3}. \quad (1.8)$$

Приняв во внимание, что

$$\vec{j} = qn\langle \vec{v} \rangle, \quad \vec{j}dl = j d\vec{l} \quad I = jS,$$

получим закон **Био - Савара – Лапласа**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} \quad \text{или} \quad dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2}, \quad (1.9)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

Вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости, проходящей через  $dl$  и точку  $A$ , а его направление определяется **правилом правого винта**.

Результирующее поле, созданное проводником с током  $I$ , в соответствии с принципом суперпозиции находится путем интегрирования по всем элементам тока.

Воспользуемся формулой (1.9) для расчета индукции магнитного поля прямого и кругового токов. Пусть поле в некоторой точке  $A$  создается током  $I$ , текущим по тонкому прямому проводнику длиной  $l$  (рис.1.4). Все  $d\vec{B}$  в данной точке имеют одинаковое направление (за чертеж), поэтому сложение векторов  $d\vec{B}$  можно заменить сложением модулей

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1.10)$$

Учитывая, что  $r d\alpha = dl \sin \alpha$  и  $r = \frac{b}{\sin \alpha}$ , приведем (1.10)

к виду, удобному для интегрирования

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя в пределах от  $\alpha_1$  до  $\alpha_2$ , получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (1.11)$$

В частности, для прямого тока бесконечной длины ( $\alpha_1 \rightarrow 0$ ,  $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ), получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}. \quad (1.12)$$

Вычислим теперь магнитное поле на оси кругового

тока. Вектор  $d\vec{B}$ , создаваемый элементом тока  $I dl$  в произвольной точке  $A$ , лежащей на оси  $OX$ , показан на рис.1.5. Векторы  $d\vec{B}$  от всех элементов контура будут образовывать симметричный конический веер, поэтому результирующий вектор  $\vec{B}$  направлен вдоль оси  $OX$ .

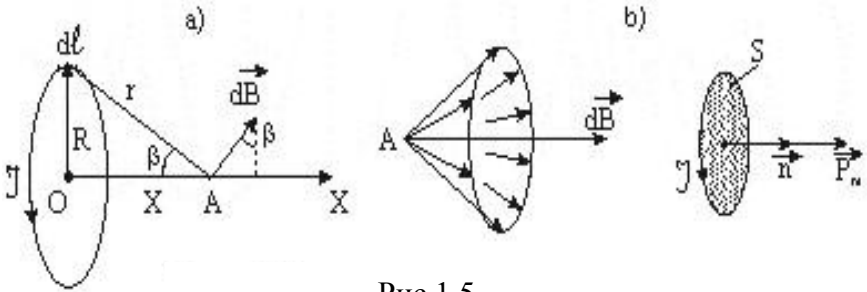


Рис.1.5

$$\text{Так как } \sin \alpha = 1, \quad dB_x = dB \cdot \sin \beta = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \sin \beta. \quad (1.13)$$

Тогда

$$B = \int dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \sin \beta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R I}{r^2} \sin \beta. \quad (1.14)$$

Если учесть, что  $\sin \beta = \frac{R}{r}$  и  $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ , то получим окончательно выражение для **индукции магнитного поля  $B$  на оси кругового тока**

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (1.15)$$

В центре витка ( $x=0$ )

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}, \quad (1.16)$$

а для  $x \gg R$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{x^3}. \quad (1.17)$$

Введя понятие **магнитного момента контура** с током

$$\vec{P}_m = IS\vec{n}, \quad (1.18)$$

где  $S$  – площадь контура,  $\vec{n}$  – положительная нормаль к контуру, направление которой связано с направлением тока правилом правого винта, выражение (1.17) приводится к виду

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{P}_m}{x^3}. \quad (1.19)$$

Эта формула подобна формуле для напряженности поля электрического диполя на его оси, что дает основание контурный ток называть магнитным диполем. Таким образом, контур с током в магнетизме играет ту же роль, что и электрический диполь в электростатике, а дипольный магнитный момент  $\vec{P}_m$  является аналогом электрического момента  $\vec{P}_E$ .

### 1.3. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля. Поле соленоида

По аналогии с электростатическим полем, введем такие важнейшие характеристики магнитного поля, как **магнитный поток и циркуляция вектора  $\vec{B}$** .

Магнитный поток сквозь произвольную поверхность  $S$  представляет собой число линий магнитной индукции, пронизывающих данную поверхность, и определяется выражением

$$\Phi_B = \int_S (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_S B_n dS, \quad (1.20)$$

где  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ ,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к площадке  $dS$ ,  $B_n$  – проекция вектора  $\vec{B}$  на направление нормали.

В СИ **магнитный поток измеряется в веберах (Вб)**:

$$\Phi_B = BS_{\perp} \Rightarrow [\Phi_B] = 1 \text{Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{Вб}.$$

В силу того, что линии индукции магнитного поля являют-

ся замкнутыми, число линий  $\vec{B}$ , выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью, всегда равно числу линий, входящих в этот объем.

Следовательно, **магнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю**

$$\Phi_B = \int B_n dS = 0. \quad (1.21)$$

Данное выражение представляет собой **теорему Гаусса для вектора  $\vec{B}$** .

Перейдем теперь к определению циркуляции вектора  $\vec{B}$

$$C = \oint_L B_l dl, \quad (1.22)$$

где  $B_l$  - проекция вектора на направление  $d\vec{l}$ ,  $L$  - произвольный замкнутый контур.

Сначала вычислим циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по контуру, охватывающему прямолинейный проводник с током (рис 1.6).

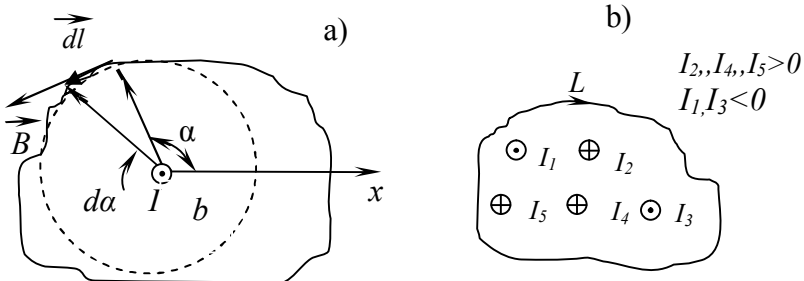


Рис.1.6

Разобьем контур на элементы  $dl$ . В каждой точке контура вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружности радиуса  $b$  с центром на оси проводника и численно равен

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{b}. \quad (1.23)$$

Произведя замену  $B_l dl = B dl_B$ ,  $dl_B = b d\alpha$ , получим

$$\oint_L B_l dl = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \oint d\alpha . \quad (1.24)$$

При обходе контура угол  $\alpha$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , поэтому

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 I . \quad (1.25)$$

Если ток создается системой произвольных проводников с токами  $I_i$ , то в соответствии с принципом суперпозиции, получим

$$\oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i . \quad (1.26)$$

Таким образом, *циркуляция вектора магнитной индукции поля в вакууме вдоль произвольного замкнутого контура равна произведению магнитной постоянной на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром.*

Ток считается положительным, если его направление связано с направлением обхода контура правилом правого винта, ток противоположного направления – отрицательным.

Тот факт, что циркуляция вектора  $\vec{B}$  не равна нулю, означает, что *магнитное поле не потенциально*. Ему нельзя приписать скалярный потенциал, поскольку он был бы неоднозначным. *Такое поле называют вихревым или соленоидальным.*

Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$  играет в магнито-статике ту же роль, что и теорема Гаусса в электростатике. При наличии определенной симметрии в распределении токов теорема о циркуляции  $\vec{B}$  оказывается весьма эффективной для расчета индукции магнитного поля. Покажем это на примере расчета магнитного поля соленоида.

**Соленоид** представляет собой цилиндрическую катушку, длина которой значительно больше ее диаметра. Поле внутри соленоида является однородным, а вне соленоида – неоднородным и очень слабым. Чем длиннее соленоид, тем

меньше значение магнитной индукции вне соленоида. Для бесконечно длинного соленоида магнитное поле снаружи отсутствует вообще.

Найдем магнитную индукцию  $\vec{B}$  внутри длинного соленоида, на единицу длины которого приходится  $n$  витков проводника, и по которому течет ток  $I$ . С этой целью рассмотрим прямоугольный замкнутый контур, одна из сторон которого параллельна оси соленоида и равняется  $l$  (рис.1.7). Циркуляцию вектора  $\vec{B}$  по данному контуру можно представить следующим образом:

$$\oint_L B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl .$$

Так как поле вне соленоида практически отсутствует и вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен к участкам 2-3 и 4-1, то все слагаемые, кроме первого равны нулю. Поэтому,

$$\oint_L B_l dl = \int_1^2 B_l dl = Bl . \quad (1.27)$$

С другой стороны, по теореме о циркуляции можно написать

$$\oint B_l dl = \mu_0 \sum I_i = \mu_0 n l I , \quad (1.28)$$

где  $n$  – плотность намотки (число витков на единице длины соленоида).

Из формул (1.27) и (1.28) следует

$$B = \mu_0 n I . \quad (1.29)$$

Полученная формула и определяет магнитное поле соленоида в вакууме.

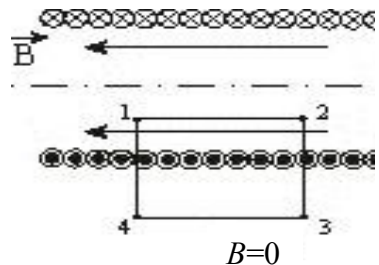


Рис.1.7



#### 1.4. Проводник и контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На движущиеся в проводнике носители тока со стороны магнитного поля действуют магнитные силы. Геометрическая сумма этих сил и обуславливает воздействие магнитного поля на проводник с током. Найдем эту силу.

Рассмотрим элемент проводника длиной  $dl$  и площадью поперечного сечения  $S$ , находящийся в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Если концентрация носителей тока в проводнике  $n$ , а их средняя скорость упорядоченного движения  $\langle \vec{v} \rangle$ , то сила действующая на элемент тока  $dl$ , определяется следующим образом:

$$d\vec{F} = \vec{F}_M dN = q [\langle \vec{v} \rangle, \vec{B}] n S dl. \quad (1.30)$$

Учитывая, что  $nq \langle \vec{v} \rangle = \vec{j}$ , а  $\vec{j} dl = j d\vec{l}$ , получим

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (1.31)$$

где  $d\vec{l}$  – вектор, направленный по току.

Направление силы  $d\vec{F}$  можно определить по правилу векторного произведения, либо по **правилу левой руки**.

Данная формула выражает **закон Ампера**, а силы, действующие на токи в магнитном поле, называют **силами Ампера**. Интегрируя (1.31) по линии тока, можно найти магнитную силу, действующую на тот или иной проводник в целом. В частности, для однородного поля  $\vec{B}$  и прямолинейного проводника длиной  $l$  с током  $I$ , сила Ампера равна

$$F = IBL \sin \alpha, \quad (1.32)$$

где  $\alpha$  - угол между направлением тока и вектора  $\vec{B}$ .

Выражение (1.32) позволяет также установить физический смысл и единицу измерения силовой характеристики магнитного поля. Если  $\alpha = \pi/2$ , то

$$B = \frac{F}{Il} \Rightarrow [B] = \frac{H}{A \cdot m} = Tл, \quad (\text{Тесла})$$

т.е. **индукция  $\vec{B}$  численно равна силе, действующей на единицу длины проводника, по которому течет единичный ток и который расположен перпендикулярно направлению однородного магнитного поля.**

Если проводник  $l$ , по которому течёт ток, не закреплён, то под действием силы Ампера он будет перемещаться в магнитном поле (рис.1.8). Вычислим работу, совершаемую силой Ампера, при перемещении проводника на расстояние  $dx$ .

$$dA = F_A dx = IBldx = IBdS.$$

Учитывая, что  $BdS = d\Phi$ , получим

$$dA = Id\Phi,$$

или после интегрирования

$$A = I\Delta\Phi. \quad (1.33)$$

**Работа, совершаемая при перемещении проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на магнитный поток сквозь поверхность, охватываемую проводником при его движении.**

Найдём работу, совершаемую над замкнутым контуром. Предположим, что контур, перемещаясь, остаётся в одной плоскости (рис.1.9). Разобьём контур на два участка 1-2 и 2-1. Силы приложенные к участку 1-2, образуют с направлением перемещения острые углы, поэтому работа  $A_I > 0$ .

$$A_1 = I(\Phi_0 + \Phi_K),$$

где  $\Phi_0$  и  $\Phi_K$  – потоки магнитной индукции, пересекаемые участком 1-2 при его движении.

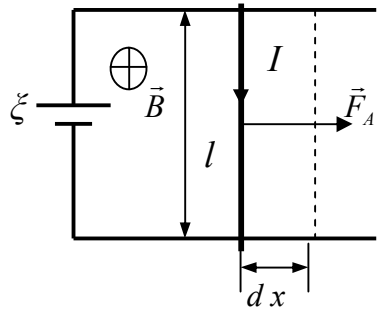


Рис.1.8

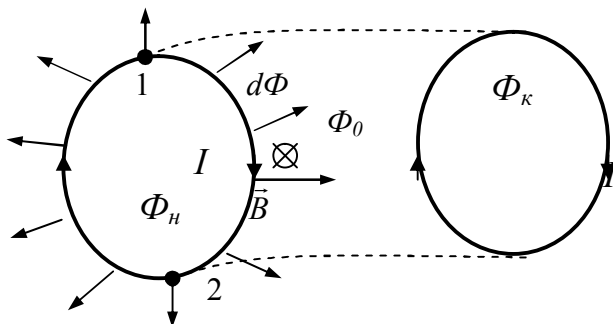


Рис.1.9.

Работа, совершаемая над участком 2-1 отрицательная, так как силы с направлением перемещения участка образуют тупые углы

$$A_2 = -I(\Phi_H + \Phi_0).$$

Работа, совершаемая над всем контуром, равна

$$A = A_1 + A_2 = I(\Phi_0 + \Phi_K) - I(\Phi_0 + \Phi_H) = I(\Phi_K - \Phi_H).$$

Разность магнитного потока в конце перемещения  $\Phi_K$  и в начале перемещения  $\Phi_H$  дает приращение потока  $\Delta\Phi$  через замкнутый контур. Таким образом

$$A = I\Delta\Phi. \quad (1.34)$$

Эта формула справедлива при любом движении контура в произвольном магнитном поле.

Магнитное поле оказывает ориентирующее действие на замкнутый проводящий контур, по которому идет постоянный ток. Найдем выражение для момента сил, действующих в однородном магнитном поле на плоский прямоугольный контур с током (рис.1.10).

Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , приложенные к проводникам 1-2 и 3-4, численно равны и направлены в противоположные стороны, поэтому они создают пару сил, вращательный момент которой

$$M = Fl = IaBbsin\alpha = ISBsin\alpha,$$

где  $S = ab$  - площадь контура.

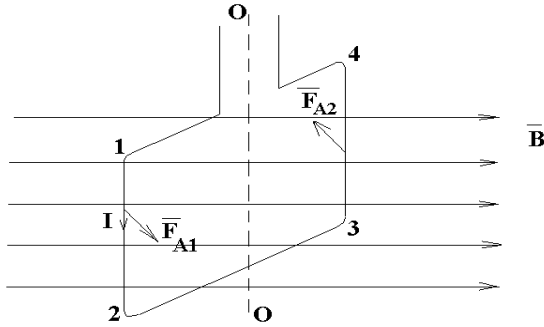


Рис.1.10

Учитывая, что  $IS = P_M$ , получим

$$M = P_M B \sin \alpha, \quad (1.35)$$

или в векторной форме

$$\vec{M} = [\vec{P}_M, \vec{B}]. \quad (1.36)$$

Таким образом, магнитное поле стремится повернуть контур с током так, чтобы его магнитный момент  $\vec{P}_M$  сориентировался в направлении вектора  $\vec{B}$ .

Контур с током в магнитном поле обладает определенным запасом потенциальной энергии, связанной с действием вращательного момента. Так, для того, чтобы угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{P}_M$  и  $\vec{B}$  увеличился на  $d\alpha$ , нужно совершить работу против сил поля, равную

$$dA = M d\alpha = P_M B \sin \alpha d\alpha. \quad (1.37)$$

Работа внешних сил идет на увеличение потенциальной энергии контура

$$dW = dA = P_M B \sin \alpha d\alpha. \quad (1.38)$$

Интегрируя (1.38) по углу поворота и полагая константу интегрирования равной нулю, будем иметь

$$W_p = -P_M B \cos \alpha, \quad W_p = -(\vec{P}_M, \vec{B}). \quad (1.39)$$

Из полученной формулы видно, что минимум потенциальной энергии достигается в положении устойчивого равновесия, когда  $\vec{P}_M \uparrow\uparrow \vec{B}$ .

## 1.5. Магнитное поле в веществе

### 1.5.1. Намагничивание вещества. Вектор намагниченности.

#### Теорема Гаусса и теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ для магнитного поля в веществе

Любое вещество под действием внешнего магнитного поля намагничивается, т. е. создает свое собственное поле. Для объяснения намагничивания **Ампер** предположил, что в веществе **циркулируют круговые микротоки**. Современные представления о строении вещества позволяют связать гипотетические токи Ампера с движением электронов в атомах или молекулах, а следовательно, с существованием молекулярных токов, обладающих магнитными моментами  $\vec{P}_m$ .

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты отдельных атомов ориентированы хаотически, поэтому средний суммарный магнитный момент образца равен нулю. Если же все вещество поместить во внешнее магнитное поле, то молекулярные токи будут располагаться так, что их магнитные моменты будут преимущественно ориентированы в направлении намагничивающего поля. В результате весь образец приобретает отличный от нуля суммарный магнитный момент.

Для количественной характеристики степени намагничивания вещества вводится **вектор намагниченности  $\vec{J}$** , определяемый выражением

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{P}_{mi}}{\Delta V}, \quad (1.40)$$

где  $\Delta V$  - физически бесконечно малый объем;  $\vec{P}_{mi}$  - магнитный момент отдельной молекулы.

Суммирование проводится по всем молекулам в объеме  $\Delta V$ .

**Намагниченность численно равна магнитному моменту единицы объема магнетика**, поэтому может быть представлена в виде

$$\vec{j} = n \langle \vec{P}_m \rangle, \quad (1.41)$$

где  $n$  – концентрация молекул;  $\langle \vec{P}_m \rangle$  - средний магнитный момент одной молекулы.

В результате намагничивания вещества в нем появляется **собственное магнитное поле**  $\vec{B}'$ , связанное с вектором  $\vec{J}$  соотношением

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{j}. \quad (1.42)$$

Наложение внешнего поля  $\vec{B}_0$  и собственного поля вещества  $\vec{B}'$  образует результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{j}. \quad (1.43)$$

Линии вектора  $\vec{B}$  и при наличии вещества остаются непрерывными, поэтому для **результирующего магнитного поля теорема Гаусса** имеет тот же вид, что и для поля в вакууме, т.е.

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (1.44)$$

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  суммарного магнитного поля в магнетике определяется не только макротоками проводимости, но и молекулярными токами, охватываемыми контуром

$$\oint_L B_e dl = \mu_0 \left( \sum I_{i.макро} + \sum I_{i.микро} \right). \quad (1.45)$$

Сумма молекулярных токов может быть выражена через вектор намагничивания

$$\sum I_{i.микро} = \oint_L J_e dl. \quad (1.46)$$

С учетом этого, циркуляция вектора  $\vec{B}$  (1.43) приводится к виду

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} \right) dl = \sum I_{i\_макро} . \quad (1.47)$$

Введя новую вспомогательную характеристику магнитного поля, называемую **напряженностью** и равную

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j} , \quad (1.48)$$

получим окончательно

$$\oint_L H_i dl = \sum I_{i\_макро} . \quad (1.49)$$

Таким образом, **циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром**. Уравнение (1.49) называется **теоремой о циркуляции вектора  $\vec{H}$  или законом полного тока**. Из этого уравнения следует, что единицей  $H$  является ампер, делённый на метр ( $[H] = A/m$ ).

В однородной изотропной среде векторы  $\vec{j}$  и  $\vec{H}$  связаны простым соотношением

$$\vec{j} = \chi \vec{H} , \quad (1.50)$$

где  $\chi$  (хи) – **магнитная восприимчивость среды**. Подставляя (1.50) в формулу (1.48), получим

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H} \quad \text{или} \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} , \quad (1.51)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  - **магнитная проницаемость среды**.

Вектор  $\vec{H}$  является аналогом электрического смещения  $\vec{D}$ . Его введение во многих случаях значительно упрощает расчеты поля в магнетиках, поскольку напряженность поля в веществе  $\vec{H}$  совпадает с напряженностью внешнего поля  $\vec{H}_0$ ,

тогда как индукция результирующего поля равна

$$\vec{B} = \mu \vec{B}_0. \quad (1.52)$$

**Магнитная проницаемость  $\mu$** , следовательно, **показывает, во сколько раз магнетик усиливает внешнее поле.**

В зависимости от величины магнитной проницаемости и знака магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на:

- 1) диамагнетики, у которых  $\chi < 0$  и  $\mu < 1$ ;
- 2) парамагнетики, у которых  $\chi > 0$  и  $\mu > 1$ ;
- 3) ферромагнетики, у которых  $\mu \sim 10^3 \div 10^6$ .

### 1.5.2. Магнитные моменты электрона и атома. Атом в магнитном поле

Для того чтобы более детально разобраться с природой намагничивания и объяснить существование различных видов магнетиков, необходимо обратиться к внутреннему строению вещества и рассмотреть магнитные свойства атомов и особенности их поведения в магнитном поле.

Согласно представлениям классической физики, электроны в атоме движутся по замкнутым орбитам, образуя систему орбитальных токов. Электрон, движущийся по орбите радиуса  $r$  со скоростью  $v$  (рис.1.11), образует круговой ток

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}. \quad (1.53)$$

Орбитальному току соответствует **орбитальный магнитный момент электрона**

$$P_m = IS = \frac{evr}{2}. \quad (1.54)$$

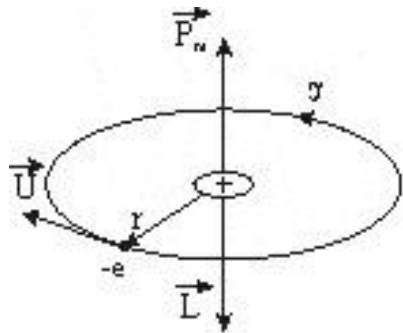


Рис.1.11



Движущийся по орбите электрон обладает также **моментом импульса или орбитальным механическим моментом**

$$L = m \nu r . \quad (1.55)$$

Поскольку направления скорости электрона и орбитального тока, вызванного его движением, противоположны, то противоположны также и направления векторов  $\vec{P}_m$  и  $\vec{L}$  (рис.1.11).

Отношение орбитального магнитного и механического моментов получило название **гиромагнитного отношения**

$$g_e = -\frac{e}{2m} . \quad (1.56)$$

Кроме орбитальных моментов  $\vec{L}$  и  $\vec{P}_m$ , электрон обладает ещё **собственным механическим моментом**  $L_S$ , получившим название **спина**, и связанного с ним **собственным магнитным моментом**  $P_{ms}$ , гиромагнитное отношение которых в два раза больше орбитального

$$g_s = \frac{P_{ms}}{L_S} = \frac{e}{m} . \quad (1.57)$$

Установлено, что для электрона

$$L_S = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad \text{и} \quad (1.58)$$

$$P_{ms} = g_s L_S = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{3} = \sqrt{3} \mu_B , \quad (1.59)$$

где  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ,  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$  - **магнетон Бора**, представляющий естественную единицу магнитного момента.

Результирующий магнитный момент атома или молекулы вещества равен векторной сумме орбитальных и спиновых магнитных моментов электрона

$$\vec{P}_{am} = \sum_i \vec{P}_{m_i} + \sum_i \vec{P}_{m_{s_i}} . \quad (1.60)$$

Измерения магнитных моментов атомов дали для большинства из них значение порядка нескольких магнетонов Бора.

Рассмотрим теперь влияние магнитного поля на движение электронов в атомах. Пусть орбита электрона ориентирована так, что вектор орбитального магнитного момента  $\vec{P}_m$  составляет с направлением  $\vec{B}$  некоторый угол  $\alpha$  (рис.1.12). В данном случае на орбиту электрона будет действовать вращательный момент

$$\vec{M} = [\vec{P}_m, \vec{B}], \quad (1.61)$$

под действием которого векторы  $\vec{P}_m$  и  $\vec{L}$  будут совершать **прецессию**, т. е. конусообразное движение вокруг вектора  $\vec{B}$ . Угловая скорость прецессии совпадает по направлению с вектором индукции  $\vec{B}$  и определяется выражением

$$\omega_L = \frac{eB}{2m}. \quad (1.62)$$

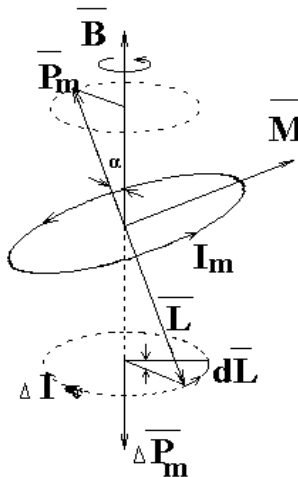


Рис.1.12

Из данной формулы следует, что скорость прецессии не зависит ни от угла  $\alpha$ , ни от радиуса орбиты, ни от скорости

электрона и, следовательно, одинакова для всех электронов, входящих в состав атома.

Прецессия электронных орбит приводит к появлению дополнительного тока

$$\Delta I_{\text{прец}} = e v_L = \frac{e \omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 B}{4\pi m}. \quad (1.63)$$

Этот ток создает индуцированный магнитный момент, направленный против внешнего поля

$$\Delta P_m = \Delta I_{\text{прец}} \cdot S_{\perp} = - \frac{e^2 B S_{\perp}}{4\pi m}. \quad (1.64)$$

Здесь  $S_{\perp}$  - проекция площади орбиты на плоскость, перпендикулярную магнитному полю  $\vec{B}$ .

Наведение магнитного момента против поля свойственно всем атомам, находящимся в магнитном поле, и называется **диамагнитным эффектом**.

### 1.5.3. Диа -, пара - и ферромагнетики

**К диамагнетикам относятся вещества, магнитные моменты атомов которых в отсутствие внешнего магнитного поля равны нулю.** Диамагнетиками являются инертные газы, вода, стекло, мрамор, большинство органических соединений, многие металлы (висмут, цинк, золото, серебро, медь, ртуть и другие).

При внесении такого вещества в магнитное поле  $\vec{B}$  в каждом его атоме или молекуле за счет прецессионного движения электронных орбит наводится магнитный момент (1.64), направленный противоположно вектору  $\vec{B}$ , что приводит к уменьшению суммарного магнитного поля. Таким образом, для диамагнетиков магнитная восприимчивость имеет отрицательное значение, а магнитная проницаемость  $\mu < 1$ . Величина  $\chi$  диамагнетиков не зависит от температуры и напряженности магнитного поля. Процесс намагничивания

диамагнетиков характеризуется линейной зависимостью  $\vec{j}$  от  $H$  (рис.1.13, кр.1).

**К парамагнетикам относятся вещества, атомы которых в отсутствие внешнего магнитного поля обладают магнитным моментом.**

Однако, намагниченность парамагнетика равна нулю, так как из-за теплового движения магнитные моменты атомов ориентированы беспорядочно. При внесении парамагнетика в магнитное поле, наряду с возникшей прецессией электронных орбит и появлением индуцированного момента  $\Delta\vec{P}_m$  происходит ориентация магнитных моментов атомов по направлению поля. При этом положительный магнитный момент оказывается значительно больше, чем отрицательный индуцированный момент, в результате чего парамагнетик намагничивается по полю. Таким образом, процесс намагничивания парамагнетиков во многом аналогичен тому, как поляризуется диэлектрик, состоящий из полярных молекул.

Кривая намагничивания парамагнетика (рис 1.13, кр.2) свидетельствует о явлении насыщения, которое связано с ориентационным упорядочением магнитных моментов атомов вещества. Тепловое движение молекул препятствует этому процессу, поэтому в не очень сильных магнитных полях восприимчивость парамагнетика оказывается обратно пропорциональной температуре

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (1.65)$$

где  $C$  – константа парамагнетика. Это соотношение носит название **закона Кюри**.

Парамагнетиками являются щелочные и щелочно-земельные металлы, редкоземельные элементы, алюминий, платина, кислород, окись азота и другие вещества.

**К ферромагнетикам относят вещества, которые обладают спонтанной (самопроизвольной) намагниченностью.** Типичные представители ферромагнетиков – это

железо, кобальт, никель и их сплавы.

Характерной особенностью ферромагнетиков является нелинейная зависимость  $J(H)$  и  $B(H)$ . Уже при небольших значениях  $H$  намагниченность достигает насыщения  $J_{\text{нас}}$  (рис.1.14), тогда как зависимость  $B(H)$  продолжает расти с увеличением  $H$  по линейному закону (рис.1.15), согласно уравнению

$$B = \mu_0 H + \mu_0 J_{\text{нас}}.$$

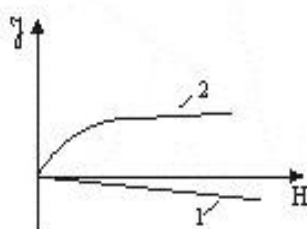


Рис.1.13

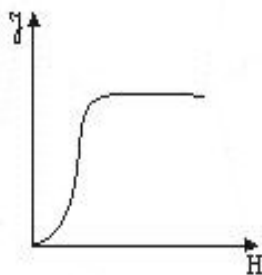


Рис.1.14

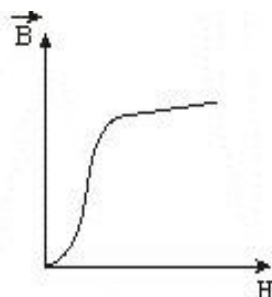


Рис. 1.15

Ввиду нелинейной зависимости  $B(H)$  магнитная проницаемость ферромагнетика также является функцией  $H$  (рис.1.16). Вначале она быстро растет с увеличением  $H$ , достигает максимума, а затем убывает, стремясь к единице в очень сильных намагничивающих полях.

Второй отличительной особенностью ферромагнетиков является **гистерезис намагничивания**. При медленном циклировании магнитного поля получается **петля гистерезиса**, внутри которой расположена основная кривая намагничивания (рис.1.17). Величина  $B_{\text{ост}}$  называется **остаточной индукцией**, а  $H_k$  – **коэрцитивной силой**, представляющей собой напряженность размагничивающего поля, при котором остаточная индукция обращается в ноль. Площадь петли гистерезиса пропорциональна количеству теплоты, выделяющейся в единице объема ферромагнетика за цикл перемагничивания.

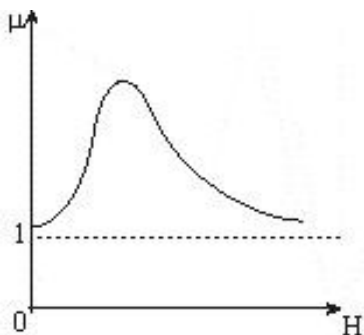


Рис.1.16

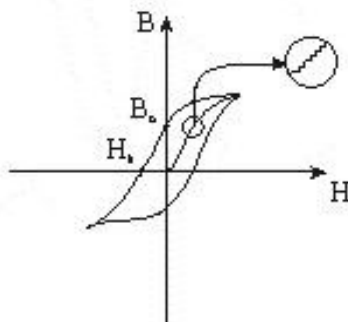


Рис.1.17

**В зависимости от значения коэрцитивной силы различают магнитомягкие и магнитотвердые ферромагнетики.** Первые отличаются малым значением  $H_k$  и малыми потерями энергии при перемагничивании. Эти материалы используются для изготовления сердечников трансформаторов. Магнитотвердые материалы, характеризующиеся широкой петлей гистерезиса ( $H_k$  – велико), используются для изготовления постоянных магнитов.

Ответственными за магнитные свойства ферромагнетиков являются нескомпенсированные спиновые магнитные моменты электронов, взаимодействие которых приводит к возникновению областей спонтанного намагничивания, называемых **доменами**. Линейные размеры доменов порядка  $(10^{-3} \div 10^{-2})$  см. В пределах каждого домена ферромагнетик намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом. Направления этих моментов различны, так что в отсутствие внешнего поля суммарный момент ферромагнетика может быть равен нулю.

При постепенном увеличении напряженности внешнего магнитного поля  $\vec{H}$  происходит рост благоприятно ориентированных доменов, т. е. тех доменов, моменты которых составляют с  $\vec{H}$  небольшой угол. На начальной стадии намагничивания этот процесс носит плавный и обратимый характер. В дальнейшем, из-за наличия в образцах различных

дефектов, мешающих плавному смещению доменных границ, наблюдаются скачкообразные изменения  $J$  (эффект Баркгаузена). Наконец, в области близкой к насыщению, наблюдается поворот магнитных доменов в направлении поля. Последние процессы являются необратимыми, что и служит причиной гистерезиса.

Для каждого ферромагнетика имеется определенная температура  $T_c$ , при которой области спонтанного намагничивания распадаются, и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется **точкой Кюри**.

При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком, магнитная восприимчивость которого подчиняется закону Кюри-Вейса

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}. \quad (1.66)$$

При охлаждении ферромагнетика ниже точки Кюри его магнитные свойства восстанавливаются.

## 1.6. Примеры решения задач по электромагнетизму

**Пример 1.** По контуру, изображённому на рисунке, идёт ток силой  $I = 10 \text{ А}$ . Определить магнитную индукцию в точке  $O$ , если радиус дуги  $R = 10 \text{ см}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

### Решение

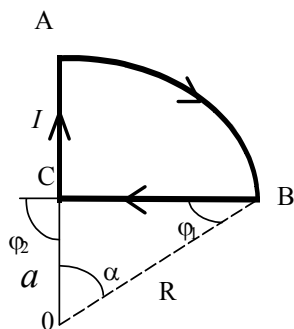
По принципу суперпозиции полей

$$\vec{B} = \vec{B}_{AB} + \vec{B}_{BC} + \vec{B}_{CA}.$$

Магнитную индукцию, создаваемую дугой  $AB$ , найдём путём интегрирования:

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R/6} dR = \frac{\mu_0 I}{12R}.$$

Для нахождения магнитной индукции, создаваемой проводником  $BC$ , воспользуемся формулой



$$B_{BC} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2),$$

где  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 90^\circ$ ,  $a = R \sin \varphi_1 = R/2$ .

С учётом данных значений 
$$B_{BC} = \frac{\sqrt{3} \mu_0 I}{4\pi R}.$$

Магнитная индукция  $B_{CA}$ , создаваемая проводником  $CA$  в точке  $O$ , равна нулю, т. к. для любого элемента  $[d\vec{l}, \vec{r}] = 0$ . Поскольку вектор  $\vec{B}_{AB}$  направлен от наблюдателя, а вектор  $\vec{B}_{BC}$  – к наблюдателю, то результирующая индукция равна

$$B = B_{BC} - B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{R} \left( \frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{12} \right) = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}.$$

**Пример 2.** Рядом с длинным прямым проводом  $MN$ , по которому течёт ток силой  $I_1$ , расположена квадратная рамка со стороной  $b$ , обтекаемая током силой  $I_2$ . Рамка лежит в одной плоскости с проводником  $MN$ , так что её сторона, ближайшая к проводу, находится от него на расстоянии  $a$ . Определить магнитную силу, действующую на рамку, а также работу этой силы при удалении рамки из магнитного поля.

### Решение

Рамка с током находится в неоднородном магнитном поле, создаваемым бесконечно длинным проводником  $MN$ :

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}.$$

Каждая сторона рамки будет испытывать действие сил Ампера, направление которых показано на рисунке. Так как стороны  $AB$  и  $DC$  расположены одинаково относительно провода  $MN$ , действующие на них силы  $\vec{F}_3$  и  $\vec{F}_4$  численно равны и равнодействующая всех сил, приложенных к рамке, равна  $F = F_1 - F_2$ ,



где  $F_1 = I_2 B_1 b = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi a}$ , а

$$F_2 = I_2 B_2 b = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(a+b)}.$$

Окончательно

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 b^2}{2\pi(a+b)}.$$

Работа по удалению рамки из магнитного поля равна

$$A = I_2(\Phi - \Phi_0) = -I_2\Phi_0.$$

Для нахождения магнитного потока через рамку в неоднородном магнитном поле разделим её на узкие полосы шириной  $dx$ , в пределах которых магнитную индукцию можно считать постоянной. Элементарный магнитный поток через полосу, находящуюся на расстоянии  $x$  от прямого тока, равен

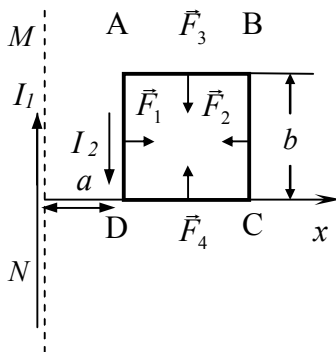
$$d\Phi = BdS = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} b dx, \quad \text{где знак минус обусловлен тем, что}$$

$$B_n = -B.$$

После интегрирования по  $x$  найдём:

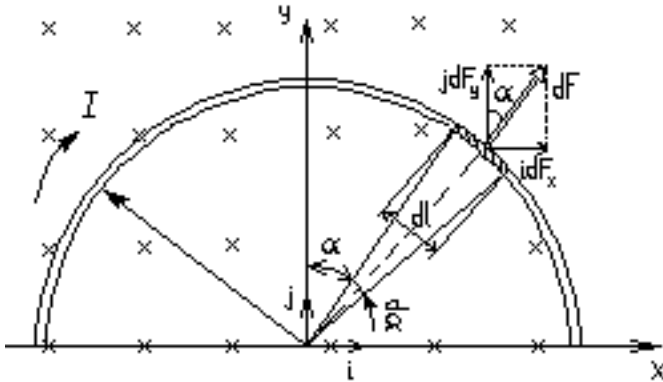
$$\Phi = -\int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} b dx = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi} b \ln \frac{a+b}{a}.$$

Окончательно 
$$A = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} b \ln \frac{a+b}{a}.$$



**Пример 3.** Провод в виде тонкого полукольца радиусом  $R=10$  см находится в однородном магнитном поле ( $B = 50$  мТл). По проводу течёт ток  $I = 10$  А. Найти силу  $F$ , действующую на провод если плоскость полукольца перпендикулярна линиям магнитной индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

## Решение



Расположим провод в плоскости чертежа перпендикулярно линиям магнитной индукции и выделим на нём малый элемент  $dl$  с током. На этот элемент тока  $I dl$  будет действовать по закону Ампера сила  $d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}]$ . Направление этой силы можно определить по правилу векторного произведения или по правилу левой руки.

Используя симметрию, выберем координатные оси так, как это изображено на рисунке. Силу  $dF$  представим в виде

$$d\vec{F} = i dF_x + j dF_y,$$

где  $i$  и  $j$  – единичные векторы (орты);  $dF_x$  и  $dF_y$  – проекции вектора  $dF$  на координатные оси  $O_x$  и  $O_y$ .

Силу  $F$ , действующую на весь провод, найдём интегрированием:

$$F = \int_L d\vec{F} = i \int_L dF_x + j \int_L dF_y,$$

где символ  $L$  указывает на то, что интегрирование ведётся по всей длине провода  $L$ . Из соображений симметрии первый

интеграл равен нулю  $\left( \int_L dF_x = 0 \right)$ . Тогда

$$F = j \int_L dF_y . \quad (1)$$

Из рисунка следует, что  $dF_y = dF \cos \alpha$ , где  $dF$  – модуль вектора  $d\vec{F}$  ( $dF = IBdl \sin(d\vec{l}\vec{B})$ ). Так как вектор  $d\vec{l}$  перпендикулярен вектору  $\vec{B}$  ( $\sin(d\vec{l}\vec{B}) = 1$ ), то  $dF = IBdl$ . Выразив длину дуги  $dl$  через радиус  $R$  и угол  $\alpha$ , получим

$$dF = IBRd\alpha .$$

Тогда

$$dF_y = IBR \cos \alpha d\alpha .$$

Введём  $dF_y$  под интеграл соотношения (1) и проинтегрируем в пределах от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$  (как это следует из рисунка):

$$\vec{F} = \vec{j} IBR \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = 2\vec{j} IBR .$$

Из полученного выражения видно, что сила  $\vec{F}$  сонаправлена с положительным направлением оси  $Oy$  (единичным вектором  $\vec{j}$ ). Найдём модуль силы  $\vec{F}$ :

$$F = |\vec{F}| = 2IBR .$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства даёт единицу силы ( $H$ ):

$$[I][B][R] = 1A \cdot 1Tл \cdot 1m = 1A \cdot 1H \cdot 1m \cdot 1m / (1A \cdot (1m)^2) = 1H .$$

Произведём вычисления:  $F = 2 \cdot 10 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1H = 0,1H$ .

**Пример 4.** В центре длинного соленоида, имеющего  $n=5 \cdot 10^3$  витков на метр, помещена рамка, состоящая из  $N=50$  витков провода площадью  $S = 4 \text{ см}^2$ . Рамка может вращаться вокруг оси  $OO$ , перпендикулярной оси соленоида. При пропускании тока по рамке и соленоиду, соединённых последовательно, рамка повернулась на угол  $\varphi = 60^\circ$ . Определить силу тока, если жёсткость пружины, удерживающей рамку в положении равновесия, равна  $k = 6 \cdot 10^{-5} H \cdot м / рад$ .

### Решение

При появлении тока рамка установится в таком положении, когда момент сил магнитного поля  $M$  уравнивается моментом упругих сил пружины:  $M=M_{\text{упр}}$ .

По определению  $M = P_m B \sin \alpha$ , где  $P_m = NIS$  – магнитный момент,  $B = \mu_0 nI$  – индукция поля соленооида.

С учётом этих выражений имеем:

$$M = \mu_0 nNI^2 S \sin \alpha.$$

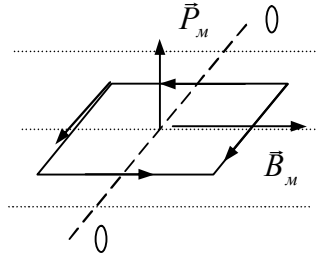
Заметим, что вначале, когда тока нет,  $\alpha = \pi/2$ . Согласно закону Гука

$$M_{\text{упр}} = k\varphi,$$

где  $\varphi = \pi/2 - \alpha$  и, следовательно,  $\sin \alpha = \cos \varphi$ .

Таким образом,  $\mu_0 nNI^2 S \cos \varphi = k\varphi$ , откуда

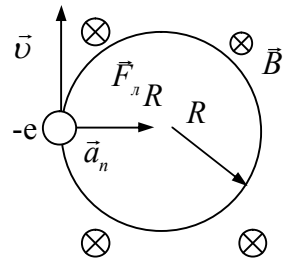
$$I = \sqrt{k\varphi / \mu_0 nNS \cos \varphi} = 1 \text{ А.}$$



**Пример 5.** Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,2 \text{ Тл}$ , стал двигаться по окружности радиуса  $R = 5 \text{ см}$ . Определить магнитный момент  $P_m$  эквивалентного кругового тока.

### Решение

Электрон начинает двигаться по окружности, если он влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции, т. е.  $\vec{v} \perp \vec{B}$ . В этом случае сила Лоренца  $\vec{F}_l$  сообщит электрону нормальное ускорение  $\vec{a}_n$ .



Согласно второму закону Ньютона  $\frac{mv^2}{R} = e\upsilon B$  ( $\sin \alpha = 1$ ).

Отсюда находим скорость электрона  $\upsilon = \frac{eBR}{m}$  и период его

обращения  $T = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\pi m}{eB}$ .

Движение электрона по окружности эквивалентно круговому току

$$I_{\text{экв}} = \frac{e}{T} = \frac{e^2 B}{2\pi m}.$$

Зная  $I_{\text{экв}}$ , найдем магнитный момент эквивалентного тока, который выражается соотношением

$$P_m = I_{\text{экв}} S,$$

где  $S = \pi R^2$  – площадь, ограниченная окружностью, описываемой электроном.

Подставим значения  $I_{\text{экв}}$  и  $S$  в формулу магнитного момента, окончательно получим  $P_m = \frac{e^2 BR^2}{2m}$ .

Убедимся в том, что правая часть равенства даст единицу измерения магнитного момента ( $Am^2$ ):

$$\frac{e^2 BR^2}{m} = \frac{Кл^2 \cdot Тл \cdot м^2}{кг^2} = \frac{Кл^2 \cdot Н}{кг \cdot А \cdot м} = \frac{А^2 \cdot с^2 \cdot м \cdot м^2}{А \cdot м \cdot кг \cdot с^2} = А \cdot м^2.$$

Произведем вычисление:

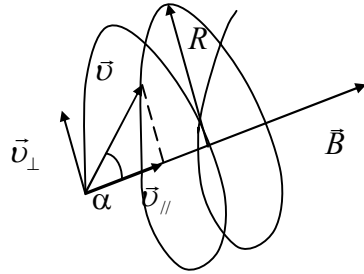
$$P_m = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 0,2 \cdot (0,05)^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} А \cdot м^2 = 7,03 \cdot 10^{-12} А \cdot м^2.$$

**Пример 6.** Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 10 мТл$  по винтовой линии, радиус которой равен  $1 см$  и шаг  $h = 6 см$ . Определить период  $T$  обращения электрона и его скорость  $\upsilon$ .

## Решение

Разложим скорость  $\vec{v}$  электрона на две составляющие: параллельную вектору  $\vec{B}$  —  $\vec{v}_{\parallel}$  и перпендикулярную ему  $\vec{v}_{\perp}$ .

Скорость  $\vec{v}_{\parallel}$  в магнитном поле не изменяется и обеспечивает перемещение электрона вдоль силовой линии. Скорость  $\vec{v}_{\perp}$  в результате действия силы



Лоренца будет изменяться только по направлению, обеспечивая движение по окружности. Таким образом, электрон будет участвовать одновременно в двух движениях: равномерном перемещении его со скоростью  $v_{\parallel}$  и вращательном со скоростью  $v_{\perp}$ .

Согласно второму закону Ньютона

$$ev_{\perp}B = \frac{mv_{\perp}^2}{R}.$$

Перпендикулярная составляющая скорости будет равна

$$v_{\perp} = \frac{eBR}{m}.$$

Период обращения электрона связан именно с этой составляющей скоростью соотношением

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

Проверим размерность полученного выражения и произведем вычисление:

$$\left[ \frac{m}{eB} \right] = \frac{\text{кг}}{\text{Кл} \cdot \text{Тл}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{А} \cdot \text{М}^2}{\text{А} \cdot \text{с} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{М}^2}{\text{с} \cdot \text{кг} \cdot \text{М}^2} = 1\text{с}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 3,57 \cdot 10^{-9} \text{с} = 3,57 \text{нс}.$$

Модуль скорости  $v$ , как видно из рисунка, можно выразить через  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$ :

$$v = \sqrt{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$$

Параллельную составляющую скорости  $v_{\parallel}$  найдем из следующих соображений. За время, равное периоду обращения  $T$ , электрон пройдет вдоль силовой линии расстояние  $h$ , т.е.  $h = Tv_{\parallel}$ , откуда

$$v_{\parallel} = \frac{eBh}{2\pi m}.$$

Таким образом, модуль скорости электрона

$$v = \frac{eB}{m} \sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}$$

Произведем вычисления:

$$v = \frac{1,6 \cdot 10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \left[ 0,01^2 + \left(\frac{0,06}{2\pi}\right)^2 \right]^{1/2} \text{ м/с} = 2,46 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

**Пример 7.** В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течёт ток  $I = 50A$ , расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны её длиной  $l = 65\text{см}$  параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно её ширине. Каков магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий рамку?

**Решение**

Магнитный поток  $\Phi$  через поверхность площадью  $S$  определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n dS.$$

В нашем случае вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости рамки. Поэтому для всех точек рамки  $B_n = B$ . Магнитная индукция  $B$ , создаваемая бесконечно

длинным прямым проводником с током, определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

где  $x$  – расстояние от провода до точки, в которой определяется  $B$ .

Для вычисления магнитного потока заметим, что так как  $B$  зависит от  $x$  и элементарный поток  $\Phi$  будет также зависеть от  $x$ , то

$$d\Phi = B(x)dS.$$

Разобьём площадь рамки на узкие элементарные

площадки длиной  $l$ , шириной  $dx$  и площадью  $dS = ldx$  (см. рис.). В пределах этой площадки магнитную индукцию можно считать постоянной, так как все части площадки равноудалены (на расстояние  $x$ ) от провода. С учётом сделанных замечаний элементарный магнитный поток можно записать в виде

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx.$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от  $x_1 = a$  до  $x_2 = 2a$ , найдём

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln x \Big|_a^{2a}.$$

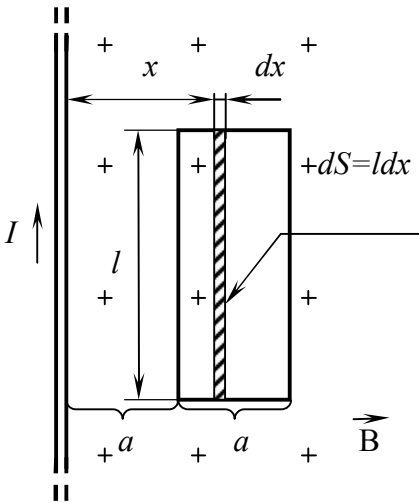
Подставив пределы, получим

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln 2.$$

Убедимся в том, что правая часть полученного равенства даёт единицу магнитного потока ( $B\delta$ ):

$$[\mu_0][I][l] = 1 \text{ Гн/м} \cdot 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ Вб}.$$

Произведя вычисления, найдём  $\Phi = 4,5 \text{ мкВб}$ .





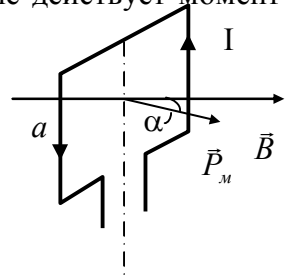
**Пример 8.** Плоский квадратный контур со стороной  $a = 10 \text{ см}$ , по которому течет ток  $I = 100 \text{ А}$ , свободно установлен в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1 \text{ Тл}$ . Определить работу  $A$ , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон на угол  $90^\circ$ .

### Решение

На контур с током в магнитном поле действует момент силы

$$M = P_M B \sin \alpha,$$

где  $P_M = IS = Ia^2$  – магнитный момент контура;  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{P}_M$  (направлен по направлению положительной нормали к контуру) и  $\vec{B}$ .



По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле, т.е.  $M=0$ , а значит векторы  $\vec{P}_M$  и  $\vec{B}$  сонаправлены ( $\alpha=0$ ). Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил будет стремиться возвратить контур в исходное положение. В силу зависимости  $M$  от угла поворота  $\alpha$ , для подсчета работы внешних сил воспользуемся методом интегрирования. Элементарная работа равна

$$dA = M d\alpha = I B a^2 \sin \alpha d\alpha.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте контура на конечный угол  $\alpha = \pi/2$ :

$$A = I B a^2 \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = I B a^2 \left| -\cos \alpha \right|_0^{\pi/2} = I B a^2. \quad (1)$$

Производя расчет в единицах СИ, получим

$$A = 100 \cdot 1 \cdot 0,1^2 \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}.$$

## Задачу можно решить и другими способами:

1) Работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока, пронизывающего контур:

$$A = -I \Delta \Phi = I(\Phi_1 - \Phi_2),$$

где  $\Phi_1$  – магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения,  $\Phi_2$  – то же, после перемещения.

Если  $\alpha_1 = \pi/2$ , то  $\Phi_1 = BS$ ,  $\Phi_2 = 0$ . Следовательно,

$$A = IBS = IBa^2,$$

что совпадает с выражением (1).

2) Воспользуемся выражением для механической потенциальной энергии контура с током в магнитном поле.

$$W_n = -p_m B \cos \alpha.$$

Тогда работа внешних сил

$$A = \Delta W_n = W_2 - W_1,$$

или

$$A = p_m B (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Так как  $p_m = Ia^2$ ,  $\cos \alpha_1 = 1$  и  $\cos \alpha_2 = 0$ , то

$$A = IBa^2,$$

что также совпадает с выражением (1)

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

### 2.1. Законы электромагнитной индукции

В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление **электромагнитной индукции**, состоящее в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике при изменении магнитного потока, охватываемого контуром проводника. Возникающий ток называли индукционным.

Правило, определяющее направление индукционного тока, было сформулировано **Ленцем**: *индукционный ток всегда направлен так, что создаваемое им магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызвавшего этот ток.*

Появление индукционного тока в проводящем контуре свидетельствует о том, что при изменениях магнитного потока  $\Phi$  в контуре возникает электродвижущая сила индукции. Фарадей установил, что величина ЭДС не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока и определяется лишь скоростью его изменения:

$$\varepsilon_i = -d\Phi/dt. \quad (2.1)$$

Если контур состоит из  $N$  витков, то

$$\varepsilon_i = -N d\Phi/dt = d(N\Phi)/dt = -d\Psi/dt, \quad (2.2)$$

где  $\Psi$  – полный магнитный поток, или потокосцепление.

Выясним причину возникновения электромагнитной индукции. Для этого рассмотрим два случая, в каждом из которых физический механизм явления существенно разный.

### 1. Подвижный контур в стационарном магнитном поле.

Обратимся к контуру с подвижной перемычкой длиной  $l$ , находящемуся в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости контура ( рис.2.1).

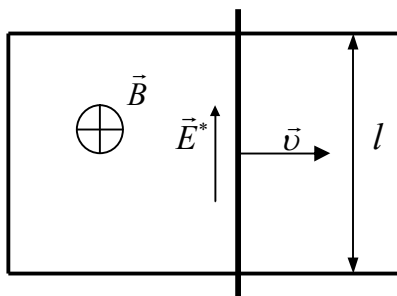


Рис.2.1

Приведем переключатель в движение со скоростью  $v$ . С той же скоростью станут перемещаться относительно поля и носители тока в переключателе – электроны. На каждый электрон при этом будет действовать сила Лоренца, равная

$$F_{\text{л}} = evB. \quad (2.3)$$

Электроны начнут перемещаться и создадут электрическое поле, которое возбуждет ток и в остальных участках контура. Если силу  $F$  разделить на величину заряда, получим напряженность стороннего поля:

$$E^* = vB. \quad (2.4)$$

По определению электродвижущей силы, она равна интегралу от напряженности стороннего электрического поля по замкнутому контуру, т. е. циркуляции вектора  $E$ :

$$\varepsilon_i = \oint E_i^* dl = -vBl,$$

учитывая, что  $vl = \frac{dS}{dt}$ , а  $BdS = d\Phi$ , получим

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $d\Phi$  – “заменяемый” проводником за время  $dt$  магнитный поток.

## 2. Неподвижный контур в переменном магнитном поле

Рассмотрим теперь неподвижный замкнутый проводник, находящийся в переменном магнитном поле. Поскольку сила Лоренца в этом случае отсутствует, а других сил, действующих на заряды, кроме электрической, нет, то остается предположить, что при изменениях магнитного поля индукционный ток обусловлен возникающим в проводнике электрическим полем  $E$ . Согласно Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению в пространстве вихревого электрического поля независимо от наличия контура. Контур лишь позволяет обнаружить по току

существование электрического поля. Циркуляция вектора  $E$  по контуру определяет ЭДС электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = \oint E_i^* dl = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.5)$$

Так как  $\hat{O} = \int B_n dS$ , а контур и поверхность неподвижны, то

$$\oint E_i^* dl = -\frac{d}{dt} \int B_n dS = -\int \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_n dS. \quad (2.6)$$

В заключении отметим, что несмотря на различие механизмов возникновения ЭДС, закон электромагнитной индукции (2.1) выполняется в обоих случаях.

## 2.2. Явление самоиндукции. Индуктивность соленоида

Электромагнитная индукция наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток сквозь контур. Если в некотором контуре течет изменяющийся ток, то магнитное поле тока также будет изменяться. Это повлечет изменение магнитного потока через контур и, следовательно, появление ЭДС индукции. Данное явление называется **самоиндукцией**.

Если в пространстве, где находится контур с током, нет ферромагнетиков, то в соответствии с законом Био-Савара величина магнитной индукции  $B$  и полный магнитный поток  $\psi$  будут пропорциональны силе тока. Это позволяет написать

$$\Psi = LI. \quad (2.7)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью контура**. Единица индуктивности в СИ называется Генри:

$$[L] = \frac{Вб}{А} = Гн.$$

Индуктивность  $L$  зависит от геометрии контура и магнитных свойств окружающей среды.

Вычислим индуктивность соленоида. При протекании по

соленоиду тока внутри него возбуждается магнитное поле, индукция которого равна

$$B = \mu\mu_0 In, \quad (2.8)$$

где  $n = N/l$  – плотность витков.

Полный магнитный поток при этом будет

$$\Psi = N\Phi = NBS = \mu\mu_0 n^2 VI, \quad (2.9)$$

где  $l$  – длина соленоида,  $S$  – площадь поперечного сечения, а  $V$  – его объем.

Таким образом, индуктивность соленоида

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (2.10)$$

При изменениях силы тока  $I$  в контуре возникает ЭДС самоиндукции, равная

$$\varepsilon_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}).$$

Если  $L = \text{const}$ , то

$$\varepsilon_c = -L\frac{dI}{dt}. \quad (2.11)$$

Знак минус показывает, что ЭДС самоиндукции всегда направлена так, чтобы препятствовать изменению силы тока в соответствии с правилом Ленца.

Характерные проявления самоиндукции – экстратоки, возникающие при замыкании и размыкании электрических цепей с индуктивностью.

## **2.3. Расчёт токов при замыкании и размыкании цепей с индуктивностью**

### **1. Исчезновение тока при размыкании цепи**

Пусть цепь состоит из катушки с индуктивностью  $L$ , резистора сопротивлением  $R$ , источника ЭДС и ключа  $K$  (рис.2.2). Когда ключ  $K$  находится в позиции 1, в цепи течет ток  $I = \xi/R$  ( $r \ll R$ ). В момент  $t = 0$  ключ перебрасывается в

позицию 2.

Ток в цепи начнет убывать и возникнет ЭДС самоиндукции, противодействующая убыванию тока. По закону Ома

$$RI = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2.12)$$

При интегрировании уравнения по току от  $I_0$  до  $I$  и по времени от 0 до  $t$ , получим

$$I = I_0 e^{-t/\tau}. \quad (2.13)$$

где  $\tau = L/R$  – постоянная времени, называемая **временем релаксации**. Зависимость  $I(t)$  представлена кривой 1 на рис.2.3.

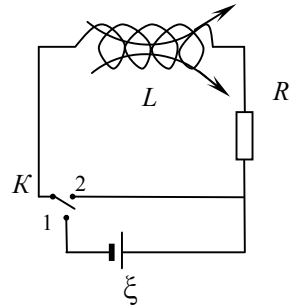


Рис.2.2

## 2. Установление тока при замыкании цепи

В момент  $t = 0$  ключ  $K$  повернем в позицию 1 и тем самым к индуктивности подключим источник ЭДС. Ток в цепи начнет нарастать и снова возникнет ЭДС самоиндукции. По закону Ома

$$RI = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}. \quad (2.14)$$

Интегрируя по  $t$  уравнение (2.14), получим

$$I = I_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad (2.15)$$

где  $I_0$  - установившийся ток (при  $t \rightarrow \infty$ ). График зависимости  $I(t)$  представлен кривой 2 на рис. 2.3.

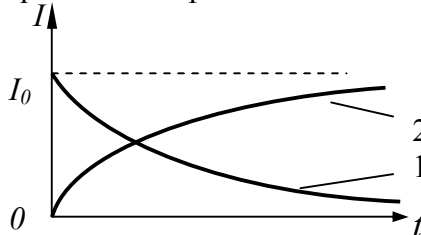


Рис.2.3

## 2.4. Взаимная индукция

**Взаимной индукцией** называется *возникновение ЭДС индукции в одном контуре при изменении тока в другом*, если они расположены в непосредственной близости друг от друга (рис.2.4).

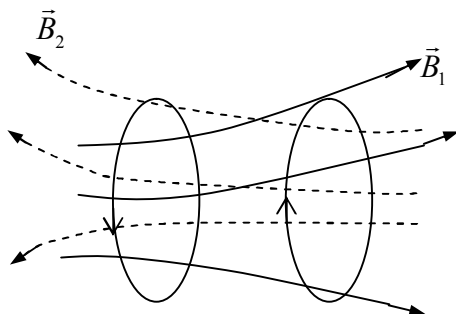


Рис.2.4

Очевидно, что магнитный поток, создаваемый в контуре 1 током, текущим в контуре 2, пропорционален току в контуре 2:

$$\Phi_1 = L_{12} I_2. \quad (2.16)$$

Аналогично, ток  $I_1$  создаёт через контур 2 магнитный поток

$$\Phi_2 = L_{21} I_1. \quad (2.17)$$

Коэффициенты пропорциональности  $L_{12} = L_{21}$  называются **коэффициентами взаимной индукции**. Они зависят от геометрии обоих контуров и их взаимного расположения, а также от магнитной проницаемости среды. Можно доказать, что при отсутствии ферромагнетиков  $L_{12} = L_{21}$ .

Рассчитаем взаимную индукцию двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник.

Если по первой катушке идёт ток  $I_1$ , то магнитная индукция поля и магнитный поток этого тока в сердечнике тороида можно найти по формулам

$$B = \mu\mu_0 \frac{N_1}{l} I_1, \quad (2.18)$$



$$\Phi = BS = \mu\mu_0 \frac{N_1}{l} SI_1, \quad (2.19)$$

где  $l$  – длина средней линии тороида,  $N_1$  – число витков первой катушки,  $S$  – площадь сердечника.

Полный магнитный поток через вторичную обмотку, содержащую  $N_2$  витков

$$\Psi_2 = N_2\Phi = \mu\mu_0 \frac{N_1N_2}{l} SI_1. \quad (2.20)$$

Согласно (2.17)

$$L_{12} = \frac{\Psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1N_2}{l} S. \quad (2.21)$$

Если  $\mu$  не зависит от силы тока, то

$$L_{12} = L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1N_2}{l} S. \quad (2.22)$$

На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов, служащих для повышения или понижения напряжения переменного тока.

Концы первичной обмотки трансформатора присоединяются к источнику переменного напряжения с ЭДС  $\xi_l$ . Возникающий переменный ток создаёт в сердечнике трансформатора переменный магнитный поток  $\Phi$ , который пронизывает витки вторичной обмотки. Изменение этого потока вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции, а в первичной ЭДС самоиндукции.

По закону Ома для первичной обмотки

$$I_1R_1 = \xi_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.23)$$

Пренебрегая падением напряжения на сопротивлении  $R_l$ , приближённо имеем

$$\xi_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.24)$$

ЭДС взаимной индукции во вторичной обмотке

$$\xi_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.25)$$

Из сопоставления выражений (2.24) и (2.25), получим

$$\xi_2 = -\frac{N_2}{N_1} \xi_1, \quad (2.26)$$

где знак минус показывает, что ЭДС в первичной и вторичной обмотках противоположны по фазе.

Отношение  $\frac{N_2}{N_1} = k$ , называется коэффициентом

трансформации. Если  $k > 1$ , то трансформатор называется повышающим, если  $k < 1$  – понижающий.

## 2.5. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображенную на рис.2.2. В положении 1 ключа  $K$  в катушке установится ток, который обусловит магнитное поле. Если перебросить ключ в положение 2, то через сопротивление  $R$  будет некоторое время течь постепенно убывающий ток, поддерживаемый возникающей в катушке ЭДС самоиндукции. Работа, совершаемая этим током за время  $dt$ , равна

$$dA = \varepsilon_c Idt = -Idv\psi. \quad (2.27)$$

Если индуктивность соленоида  $L = const$ , то

$$d\psi = LdI \quad \text{и} \quad dA = -LI dI. \quad (2.28)$$

Интегрируя (2.28) от первоначального значения  $I$  до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за все время,

$$A = -\int ILdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.29)$$

Данная работа совершается за счет убыли энергии магнитного поля, следовательно, энергия поля соленоида, через который течет ток  $I$ , равна

$$W = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.30)$$

Выразим **энергию магнитного поля** через величины, характеризующие само поле. Так как

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \quad \text{и} \quad I = \frac{B}{\mu\mu_0 n},$$

получим

$$W = \frac{B^2}{\mu\mu_0} V = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V. \quad (2.31)$$

Магнитное поле, а следовательно и его энергия, локализованы внутри соленоида. Отсюда для **плотности энергии магнитного поля** будем иметь

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (2.32)$$

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно путём интегрирования найти энергию поля, заключённого в любом объёме

$$W = \int_V \omega dV. \quad (2.33)$$

## 2.6. Примеры решения задач по законам электромагнитной индукции

**Пример 1.** В однородном магнитном поле ( $B = 0,2 \text{ Тл}$ ) равномерно с частотой  $\nu = 600 \text{ мин}^{-1}$  вращается рамка, содержащая  $N = 1200$  витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки  $S = 100 \text{ см}^2$ . Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определите максимальную ЭДС, индуцируемую в рамке.

### Решение

Согласно закону электромагнитной индукции

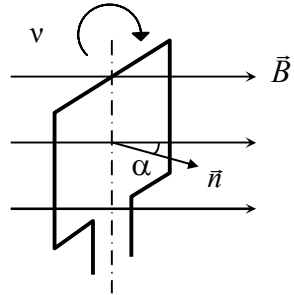
$$\xi = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где  $\Phi = NBS\cos\alpha$  – полный магнитный поток, пронизывающий рамку.

При вращении рамки угол  $\alpha$  ( $\vec{n} \wedge \vec{B}$ ), образованный нормалью  $n$  к плоскости рамки и линиями индукции  $B$ , изменятся по закону

$$\alpha = \omega t = 2\pi\nu t$$

Подставив в закон электромагнитной индукции выражение магнитного потока и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:



$$\xi = -NBS \frac{d}{dt}(\cos 2\pi\nu t) = NBS \cdot 2\pi\nu \cdot \sin 2\pi\nu t$$

Максимальное значение ЭДС определится при условии, что  $\sin 2\pi\nu t = 1$ . таким образом,

$$\xi_{\max} = 2\pi\nu NBS.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу ЭДС (В):

$$[2\pi\nu NBS] = \frac{Tл \cdot м^2}{с} = \frac{Н \cdot м}{А \cdot м \cdot с} = \frac{Джс}{Кл} = В$$

Произведем вычисление:

$$\xi_{\max} = 2\pi \cdot 10 \cdot 1200 \cdot 0,2 \cdot 100 \cdot 10^{-4} = 151(\text{В}).$$

**Пример 2.** Соленоид содержит  $N = 1200$  витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока  $I = 4 \text{ А}$  магнитный поток  $\Phi = 6 \text{ мкВб}$ . Определить индуктивность  $L$  соленоида и энергию магнитного поля соленоида.

### Решение

Индуктивность  $L$  связана с потокоцеплением  $\Psi = LI$ .  
Потокоцепление, в свою очередь, может быть определено через поток  $\Phi$  и число витков  $N$ :

$$\Psi = N\Phi.$$

На основании этих формул индуктивность соленоида

$$L = N\Phi/I.$$

Энергия магнитного поля соленоида

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{N\Phi I}{2}.$$

Подставим в формулы для  $L$  и  $W$  значения физических величин и произведем вычисления:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ Гн} = 1,8 \text{ Гн};$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

**Пример 3.** Определить индукцию  $B$  и напряжённость  $H$  магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей  $N = 200$  витков, идёт ток  $I = 5 \text{ А}$ . Внешний диаметр  $d_1$  тороида равен  $30 \text{ см}$ , внутренний  $d_2 = 20 \text{ см}$ .

### Решение

Для определения напряжённости магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора  $\vec{H}$  вдоль линий магнитной индукции поля:  $\oint H dl$ .

Из условия симметрии следует, что линии магнитной индукции тороида представляют собой окружности и что во всех точках этой линии напряжённости одинаковы. Поэтому в выражении циркуляции напряжённость  $H$  можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до  $2\pi r$ , где  $r$  — радиус окружности, совпадающей с линией индукции, вдоль которой вычисляется циркуляция, т.е.

$$\oint_L H dl = H \int_0^{2\pi r} dl = 2\pi r H . \quad (1)$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряжённости магнитного поля равна сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint_L H_i dl = \sum_{i=1}^n I_i . \quad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2) получим

$$2\pi r H = \sum_{i=1}^n I_i . \quad (3)$$

Линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (3) примет вид  $2\pi r H = NI$ , откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi r} . \quad (4)$$

Для средней линии тороида  $r = (R_1 + R_2)/2 = (d_1 + d_2)/4$ . Подставив выражение в формулу (4), найдём

$$H = \frac{2NI}{\pi(d_1 + d_2)} . \quad (5)$$

Магнитная индукция  $B_0$  в вакууме связана с напряжённостью поля соотношением  $B_0 = \mu_0 H$ . Следовательно,

$$B_0 = \frac{2\mu_0 NI}{\pi(d_1 + d_2)} . \quad (6)$$

Подставив значения величин в выражения (5) и (6), получим:  $H = 1,37 \text{ кА/м}$ ,  $B_0 = 1,6 \text{ мТл}$ .

**Пример 4.** Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной  $l_0 = 5 \text{ мм}$ . Длина  $l$  средней линии кольца равна  $1 \text{ м}$ . Сколько витков  $N$  содержит обмотка на кольце, если при силе тока  $I = 4 \text{ А}$  индукция  $B$  магнитного поля в воздушном зазоре равна  $0,5 \text{ Тл}$ . Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре можно пренебречь. Явление гистерезиса не учитывать.

## Решение

Пренебрегая рассеянием магнитного потока, мы можем принять, что индукция поля в воздушном зазоре равна индукции поля в чугуне. На основании закона полного тока запишем:  $IN = Hl + H_0l_0$ . По графику (см. приложениеб) находим что при  $B = 0,5 \text{ Тл}$ , напряжённость  $H$  магнитного поля в чугуне равна  $1,2 \text{ кА/м}$ . Так как для воздуха  $\mu = 1$ , то напряжённость поля в воздушном зазоре  $H_0 = B/\mu_0 = 0,4 \text{ МА/м}$ . Искомое число витков  $N = (Hl+H_0l_0) / I = 800$ .

### 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Обобщив основные экспериментальные законы электричества и магнетизма, Максвелл создал единую теорию электромагнитного поля. В электродинамике теория Максвелла играет ту же роль, что и законы Ньютона в классической механике. Она позволила не только объяснить с единых позиций уже известные факты, но и предсказать существование электромагнитных волн.

Принципиально новой идеей, выдвинутой Максвеллом, была идея о взаимных превращениях электрических и магнитных полей. Обобщая закон Фарадея для электромагнитной индукции, Максвелл предположил, что **изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле**, циркуляция вектора напряженности которого определяется уравнением

$$\oint_l E_l dl = - \int_S \left( \frac{d\vec{B}}{dt} \right)_n dS. \quad (3.1)$$

В свою очередь, следует ожидать, что **изменяющееся во времени электрическое поле, должно создавать переменное магнитное поле**. Для установления количественной связи между изменяющимся электрическим и вызванным

им магнитным полями, Максвелл ввел понятие тока смещения. Рассматривая конденсатор в цепи переменного тока, он предположил, что ток проводимости замыкается в конденсаторе током смещения. *Ток смещения представляет собой изменяющееся электрическое поле и не сопровождается движением электрических зарядов, но он способен создавать магнитное поле, как и ток проводимости.* Плотность тока смещения равна

$$\vec{j}_{см} = \frac{d\vec{D}}{dt}, \quad (3.2)$$

где  $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$  – вектор электрического смещения.

Сумму тока проводимости и тока смещения называют **полным током**, его плотность равна

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j}_{np} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (3.3)$$

Введение полного тока позволяет обобщить теорему о циркуляции напряженности магнитного поля, представив ее в виде

$$\oint H_l dl = \int (\vec{j}_{np} + \frac{d\vec{D}}{dt})_n dS. \quad (3.4)$$

Из данного уравнения следует, что магнитное поле может возбуждаться не только движущимися зарядами, но и изменениями электрического поля, подобно тому, как электрическое поле может возбуждаться не только электрическими зарядами, но и изменениями магнитного поля.

К рассмотренным уравнениям (3.1 и 3.4) Максвелл добавил еще два уравнения, выражающие теорему Гаусса для векторов  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  электромагнитного поля

$$\oint D_n dS = \int_V \rho dV, \quad (3.5)$$

$$\oint B_n dS = 0. \quad (3.6)$$



Полученная система четырех интегральных уравнений выражает в наиболее компактной форме все основные законы электромагнитного поля. Из этих уравнений, подчеркнем это еще раз, следует, что источником электрического поля являются как заряды, так и изменяющееся со временем магнитное поле. В свою очередь, магнитное поле возбуждается либо движущимися зарядами (ток проводимости), либо переменным электрическим полем (ток смещения).

## 4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### 4.1. Механические колебания и волны

#### 4.1.1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

Колебаниями называют процессы, характеризующиеся повторяемостью во времени. Простейшими из них являются **гармонические колебания**, при которых колеблющиеся величины изменяются со временем по закону синуса или косинуса.

**Кинематическое уравнение гармонических колебаний** имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.1)$$

где  $x$  - смещение системы от своего положения равновесия;  $A$  - амплитуда колебаний;  $\varphi = \omega_0 t + \alpha$  - фаза колебаний;  $\alpha$  - начальная фаза;  $\omega_0$  - собственная циклическая частота.

График гармонических колебаний представлен на рис. 4.1.

Продифференцировав дважды уравнение (4.1) по времени найдём скорость и ускорение колеблющейся точки

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.2)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -x \cdot \omega_0^2. \quad (4.3)$$

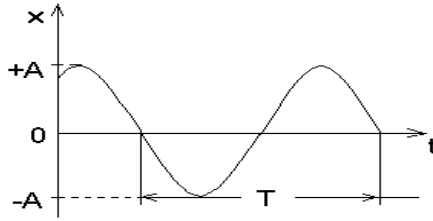


Рис. 4.1

Из (4.3), следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**

$$\square \quad x + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.4)$$

Решением этого уравнения является выражение (4.1).

#### 4.1.2. Энергия гармонического колебания

С учётом уравнения (4.3), сила действующая на материальную массой  $m$ , равна

$$\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{x} = -k\vec{x} , \quad (4.5)$$

где  $\omega_0^2 x = k$  - коэффициент упругости.

Упругая сила является консервативной, поэтому полная энергия механических колебаний остаётся постоянной:

$$E = T + \Pi = const.$$

**Кинетическая энергия** материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, с учётом уравнения 4.2, равна

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.6)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (4.7)$$

**Потенциальная энергия** материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы  $F$ , с учётом уравнения 4.5, равна

$$\begin{aligned} \Pi &= -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \\ &= \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (4.8)$$

или

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (4.9)$$

Частота изменения кинетической и потенциальной энергий в два раза превышает частоту гармонических колебаний (см. рис.4.2).

Полная механическая энергия колеблющейся системы с учетом уравнений (4.7) и (4.9) равна

$$E = T + \Pi = mA^2\omega_0^2/2.$$

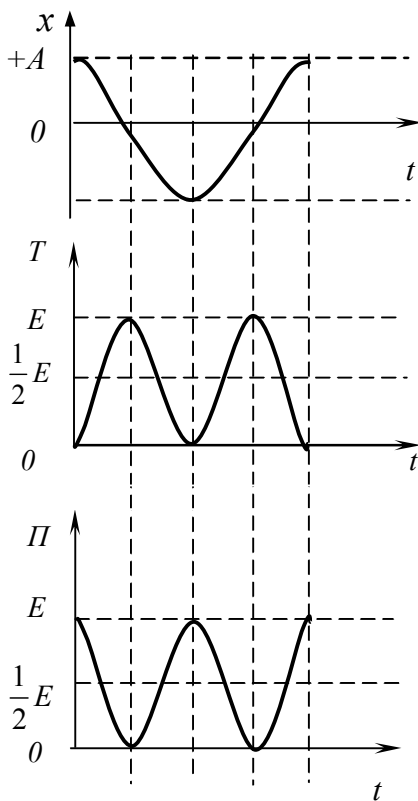


Рис.4.2

### 4.1.3. Математический и физический маятники

Идеализированные системы, в которых колебания возникают за счёт первоначально сообщённой энергии при последующем отсутствии внешних воздействий и описываются уравнением (4.4), называются **гармоническими осцилляторами**. Примерами гармонических осцилляторов являются пружинный, физический и математический маятники. Колебания, возникающие в таких системах при отсутствии сил

трения, называются **собственными гармоническими колебаниями**.

**Математическим маятником** называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (рис.4.3).

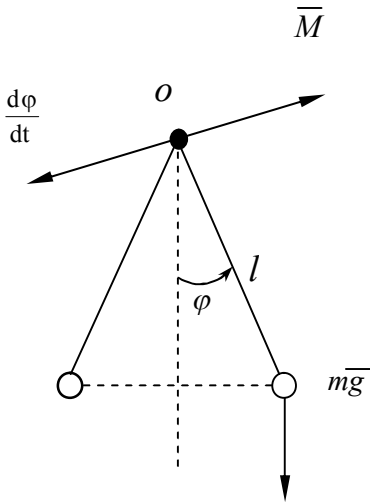


Рис.4.3

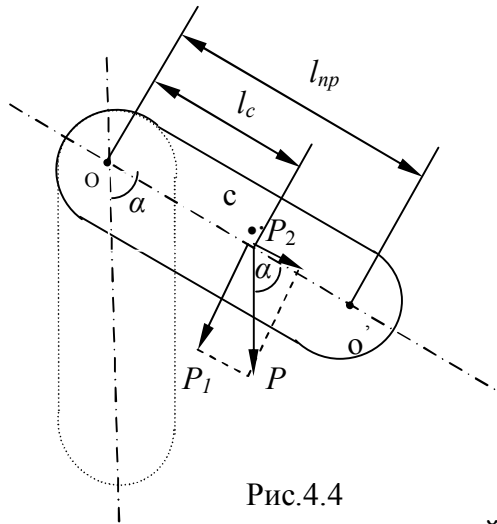


Рис.4.4

При отклонении от положения равновесия на некоторый угол  $\varphi$  математический маятник начинает совершать свободные колебания. В случае малых колебаний  $\sin\varphi \approx \varphi$ , дифференциальное уравнение колебаний математического маятника имеет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (4.10)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ ;  $l$  – длина математического маятника;  $g$  – ускорение свободного падения.

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.11)$$

где  $A$  и  $\alpha$  – постоянные, определяемые начальными условиями возбуждения колебаний.

Таким образом, при малых колебаниях математический маятник колеблется по гармоническому закону. Период колебаний математического маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{l/g} . \quad (4.12)$$

Видно, что период  $T$  зависит только от длины маятника  $l$ , ускорения силы тяжести  $g$  и не зависит от его массы.

**Физический маятник** – любое тело, подвешенное в точке, лежащей вне его центра тяжести (рис 4.4).

Докажем, что маятник, отклоненный на малый угол  $\alpha$  от положения равновесия, будет совершать гармонические колебания. Обозначим через  $I$  момент инерции маятника относительно оси  $O$ , перпендикулярной плоскости чертежа (рис.4.4). Пусть точка  $C$  является центром тяжести. Силу тяжести  $P = mg$  можно разложить на две составляющие, одна из которых  $P_2$  уравнивается реакцией опоры.

Под действием другой составляющей

$$P_1 = P \cdot \sin \alpha = mg \sin \alpha \quad (4.13)$$

маятник приходит в движение. Из основного закона динамики вращательного движения имеем

$$I \varepsilon = - m g l_c \sin \alpha , \quad (4.14)$$

где

$$\varepsilon = \frac{d^2 \alpha}{dt^2} , \quad (4.15)$$

угловое ускорение,  $l_c = CO$  – расстояние от точки подвеса до центра тяжести.

Знак минус выбран потому, что действующая сила направлена в сторону, противоположную положительному направлению отклонения маятника, т.е. стремится вернуть его в положение равновесия. При малых отклонениях можно считать, что  $\sin \alpha \approx \alpha$ , поэтому

$$P_1 \approx m g \alpha . \quad (4.16)$$

Подставив (4.15) и (4.16) в (4.14), получим

$$I \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + mgl_c \alpha = 0. \quad (4.17)$$

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением гармонического колебательного движения. Частота и период колебаний определяются из формул

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl_c}{I}}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl_c}}. \quad (4.18)$$

Величина  $L = \frac{I}{ml_c}$  называется **приведённой длиной**

**физического маятника**, она численно равна длине математического маятника с периодом колебаний, равным периоду колебаний данного физического маятника.

Таким образом, период и частота колебаний физического маятника определяются выражениями

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (4.19)$$

#### 4.1.4. Сложение гармонических колебаний одного направления. Биения

Результирующее движение точки, одновременно участвующей в нескольких колебаниях, во многих случаях является колебательным. Таким образом, можно говорить о сложении нескольких колебаний в одно результирующее.

Сложение гармонических колебаний одного направления **с одинаковыми частотами** и различными фазами осуществляется с помощью **вектора амплитуды**, позволяющего свести сложение колебаний к сложению векторов. Вектор амплитуды представляет собой вектор, величина которого равна амплитуде гармонического колебания, а угол между его направлением и осью  $X$  определяется начальной фазой (рис.4.5). Если привести вектор во вращение против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , то его проекция на ось  $X$

будет изменяться со временем по гармоническому закону. Следовательно, гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора амплитуды.

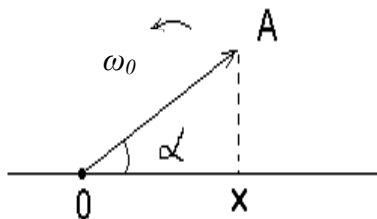


Рис.4.5

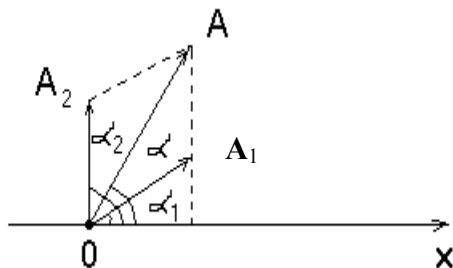


Рис.4.6

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты, описываемых уравнениями:

$$X_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad (4.20)$$

$$X_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2). \quad (4.21)$$

Представим эти колебания с помощью векторов амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  и построим вектор  $A$ , представляющий результирующие колебания (рис.4.6).

Результирующее колебание является гармоническим с частотой  $\omega_0$

$$X = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.22)$$

амплитуда которого и его начальная фаза  $\alpha$  определяются из векторной диаграммы:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (4.23)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \quad (4.24)$$

Рассмотрим теперь два гармонических колебания, которые происходят в одном направлении, с близкими частотами  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$  ( $\Delta\omega \ll \omega$ ). Пусть амплитуды

складываемых колебаний одинаковы  $A_1=A_2= A$ , а начальные фазы колебаний  $\alpha_1= \alpha_2= 0$ .

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t; \\ x_2 = A \cos (\omega + \Delta \omega) t. \end{cases} \quad (4.25)$$

Результирующее колебание  $x = x_1 + x_2$ , т.е.

$$\begin{aligned} x &= A \cos \omega t + A \cos (\omega + \Delta \omega) t = \\ &= 2 A \cos \left( \frac{2 \omega + \Delta \omega}{2} \right) t \cdot \cos \frac{\Delta \omega}{2} t. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Учитывая что  $\Delta \omega \ll \omega$ , получим

$$x = 2 A \cos \omega t \cdot \cos \frac{\Delta \omega}{2} t. \quad (4.27)$$

Так как  $\cos \frac{\Delta \omega}{2}$  изменяется значительно медленней, чем  $\cos \omega t$ , результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$ , амплитуда которого медленно изменяется также по гармоническому закону с частотой  $\square \omega / 2$ . Такие колебания называются **биениями** (рис.4.7).

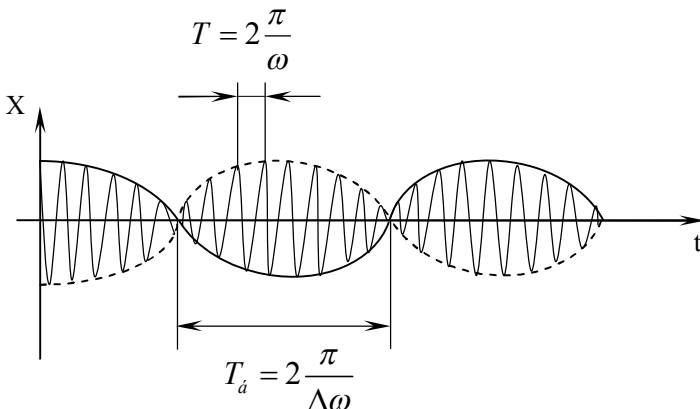


Рис.4.7



Уравнение биений имеет вид

$$x = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right| \cdot \cos \omega t. \quad (4.28)$$

Амплитуда колебаний равна  $\left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$ , частота пульсаций амплитуды (биений), равна разности частот складываемых колебаний (см. рис.4.7), а период биений  $T_d = 2 \frac{\pi}{\Delta\omega}$ .

#### 4.1.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Пусть колебания одинаковой частоты совершаются вдоль взаимно перпендикулярных координатных осей  $X$  и  $Y$ . Выберем начало отсчёта времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Запишем уравнения колебаний таким образом

$$x = A \cos \omega_0 t, \quad (4.29)$$

$$y = B \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.30)$$

где  $\alpha$  - разность фаз складываемых колебаний.

Исключив из данных уравнений параметр  $t$ , получим уравнение траектории результирующего колебания.

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) представляет собой уравнение эллипса, произвольно ориентированного относительно координатных осей  $X$  и  $Y$ .

#### Рассмотрим частные случаи:

1) При  $\alpha = 0$  уравнение (4.31) принимает вид

$$y = \frac{B}{A} x. \quad (4.32)$$

Колеблющаяся точка перемещается по прямой, причём расстояние от начала координат изменяется по закону.

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega_0 t. \quad (4.33)$$

Таким образом, результирующее колебание является гармоническим.

2) При  $\alpha = \pm\pi$  результирующее колебание так же является гармоническим и совершается вдоль прямой, описываемой уравнением

$$y = -\frac{B}{A}x. \quad (4.34)$$

3) При  $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$  уравнение (4.31) становится уравнением эллипса, приведённого к координатным осям

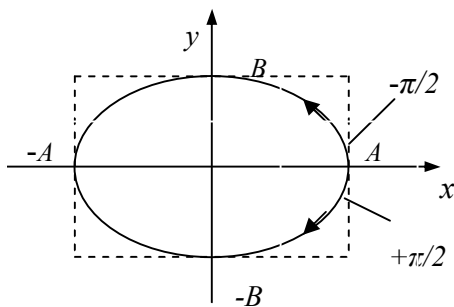
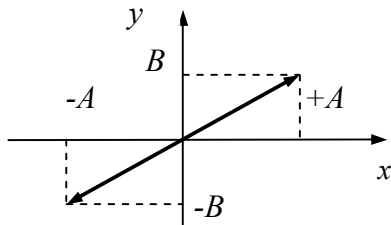
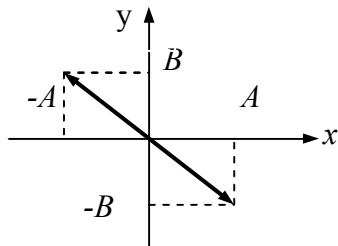
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (4.35)$$

Направление обхода эллипса определяется знаком

перед  $\pi/2$ . При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

При сложении взаимноперпендикулярных гармонических колебаний с **кратными частотами**, траектории движения точки имеют вид сложных кривых – **фигур Лиссажу**, вид которых зависит от соотношения частот, и разности фаз складываемых колебаний.

Например, при сложения двух колебаний с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  и разностью фаз  $\Delta\varphi_1=0$  и  $\Delta\varphi_2 = \pi/2$ , соответствующие фигуры Лиссажу показаны на рис.4.8 и рис.4.9.



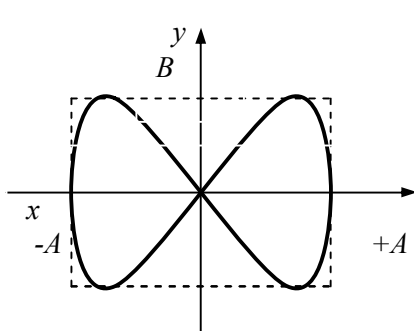


Рис.4.8

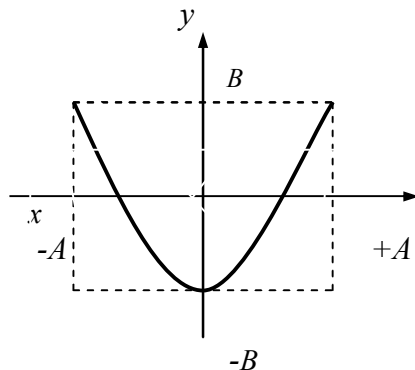


Рис.4.9

По виду фигуры Лиссажу можно определить соотношение частот и разность фаз складываемых колебаний.

#### 4.1.6. Затухающие колебания и их характеристики

Рассмотрим реальную механическую систему (например, пружинный маятник), в которой действуют силы трения. Считая силу трения пропорциональной скорости, закон движения пружинного маятника запишется в виде

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x}, \quad (4.36)$$

где  $r$ - коэффициент сопротивления,  $k$ -коэффициент упругости.

Уравнение (4.36) может быть приведено к стандартному виду, представляющему **дифференциальное уравнение затухающих колебаний**

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.37)$$

где  $\beta = r/2m$  - коэффициент затухания;  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  - собственная частота колебаний системы.

Решение уравнения (4.37) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (4.38)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  - частота затухающих колебаний.

График функции (4.38) показан на рис. 4.10. Амплитуда колебаний в этом случае изменяется по закону

$$A = A_0 e^{-\beta t}, \quad (4.39)$$

а период колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.40)$$

С ростом  $\beta$  период затухающих колебаний увеличивается, стремясь к бесконечности при критическом коэффициенте затухания  $\beta_{кр} = \omega_0$ . При  $\beta \geq \beta_{кр}$  процесс носит **апериодический** характер. Выведенная из положения равновесия система возвращается к нему, не совершая колебаний (рис. 4.11).

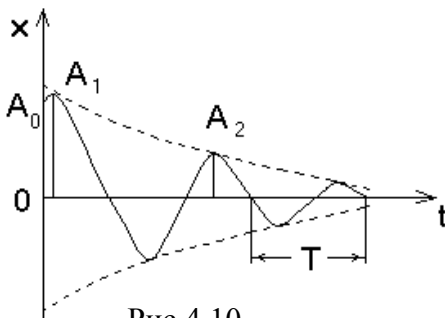


Рис.4.10

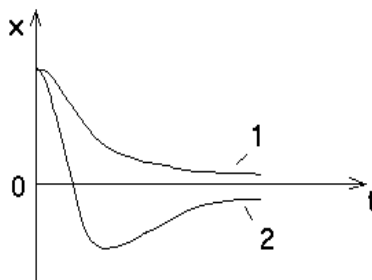


Рис.4.11

### Основные характеристики затухающих колебаний:

1) **время релаксации**  $\tau$  - время, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau}} = e \Rightarrow \beta \tau = 1. \quad (4.41)$$

2) **логарифмический декремент затухания**, представляющий логарифм отношения двух соседних амплитуд, т.е.

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}, \quad (4.42)$$

где  $N$  - число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз.

### 3) добротность колебательной системы

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} = \frac{\pi}{\lambda}, \quad (4.43)$$

где  $E$  - энергия системы в момент времени  $t$ ;  $\Delta E$  - убыль энергии за один период колебаний.

## 4.1.7. Вынужденные колебания. Резонанс

Вынужденные колебания возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы. С учётом вынуждающей силы закон движения пружинного маятника запишется в виде

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x} + F_0 \cos \omega_g t. \quad (4.44)$$

После преобразования получим неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_g t, \quad (4.45)$$

где  $f_0 = F_0 / m$ .

Общее решение данного неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (4.46)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ , а  $A_0$  и  $\alpha$  - произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения (4.44) имеет вид

$$x = A \cos(\omega_g t - \varphi), \quad (4.47)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_g^2)^2 + 4\beta^2 \omega_g^2}}, \quad (4.48)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega_0}{\omega_0^2 - \omega_0^2}. \quad (4.49)$$

Функция (4.47) в сумме с (4.46) даёт общее решение уравнения (4.45), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (4.46) играет значительную роль в начальной стадии процесса при установлении колебаний. С течением времени его роль из-за экспоненциального множителя всё больше уменьшается и им можно пренебречь

. Графически вынужденные колебания представлены на рисунке 4.12.

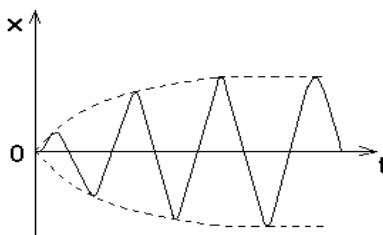


Рис. 4.12

В установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой  $\omega_0$  и являются гармоническими, амплитуда и фаза которых определяются выражениями (4.48) и (4.49).

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы. При некоторой частоте амплитуда достигает максимума. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота - резонансной частотой.

Из условия максимума функции (4.48) найдём

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (4.50)$$

а амплитуда колебаний при резонансе определяется из выражения

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.51)$$

Резонансные кривые при различных значениях коэффициента затухания представлены на рисунке 4.13. Чем меньше  $\beta$  тем выше и правее лежит резонансный максимум. Если  $\omega_g \rightarrow 0$ , то все кривые приходят к одному и тому же значению  $f_0/\omega_0^2$ , так называемому **статическому отклонению**.

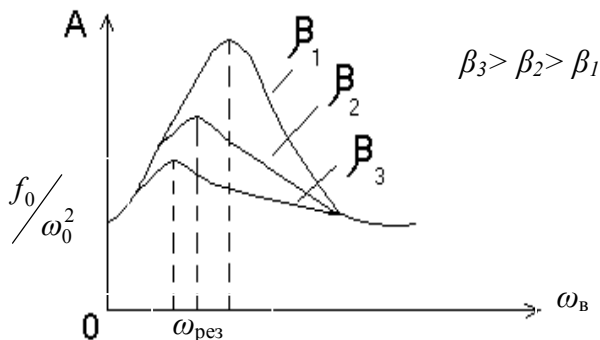


Рис. 4.13

Резонансная амплитуда связана с добротностью колебательной системы следующим соотношением

$$A_{рез} = Q \frac{f_0}{\omega_0^2}. \quad (4.52)$$

Таким образом, добротность характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше  $Q$ , тем острее и выше резонансная кривая.

#### 4.1.8. Распространение волн в упругих средах. Уравнение бегущей волны

Процесс распространения колебаний в упругой среде, периодический во времени и в пространстве, называется **механической волной**. Распространение волн не связано с переносом вещества. Частицы среды, в которой распространя-

ется волна, не переносятся волной, они лишь совершают колебания около своих положений равновесий. От одних участков среды к другим переносятся только энергия и импульс.

Различают продольные и поперечные волны. В **продольной волне** частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны. В **поперечной волне** частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны. Механические поперечные волны могут возникнуть лишь в среде, обладающей упругостью формы, т.е. способностью сопротивляться деформации сдвига. Поэтому поперечные волны могут существовать лишь в твёрдых телах. Продольные волны связаны с объёмной деформацией среды, поэтому они могут распространяться как в твёрдых телах, так и в жидкостях и в газах. Скорости распространения поперечных и продольных механических волн в твёрдых телах определяются выражениями :

$$v_{non} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (4.53)$$

$$v_{prod} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (4.54)$$

где  $G$  – модуль сдвига,  $E$  – модуль Юнга.

В газообразных средах распространяется только продольная волна

$$v_{prod} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \quad (4.55)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – абсолютная температура,  $\mu$  – молекулярная масса газа.

Волна называется синусоидальной, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. График зависимости смещения частиц среды  $\xi$ , участвующих в волновом процессе, от расстояния  $x$  этих



частиц до источника колебаний для какого-то фиксированного момента времени представлен на рисунке 4.14. Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны. **Длина волны  $\lambda$**  равна такому расстоянию, на которое распространяется определённая фаза волны за период, т.е.

$$\lambda = vT = v/\nu. \quad (4.56)$$

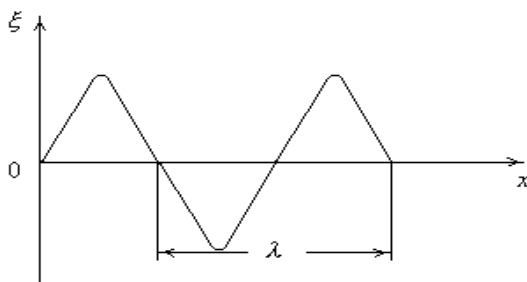


Рис.4.14

Зависимость смещения колеблющейся точки от координат и времени устанавливается **уравнением волны**.

В случае плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$ , уравнение имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - x/v), \quad (4.57)$$

где  $x/v = \tau$  - время прохождения волной расстояния от источника ( $x = 0$ ) до частицы с координатой  $x$ .

Или в стандартной форме

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (4.58)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число.

Уравнение волны, распространяющейся в сторону убывания  $x$ , отличается только знаком члена  $kx$ .

Уравнение любой волны является решением некоторого дифференциального уравнения, называемого волновым. В общем случае волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (4.59)$$

#### 4.1.9. Стоячие волны

Стоячие волны образуются при наложении двух бегущих синусоидальных волн, распространяющихся навстречу друг другу. Практически, стоячие волны возникают при отражении волн от преград.

Пусть уравнения бегущей и отражённой волны имеют вид:

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi_2 = A \cos(\omega t + kx)$$

Сложив эти уравнения, получим уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cos \omega t, \quad (4.60)$$

Из (4.60) следует, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания с частотой  $\omega$ , т.е. с частотой бегущих волн и амплитудой

$$A_{cm} = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|, \quad (4.61)$$

являющейся периодической функцией координаты  $x$ .

Точки среды, в которых амплитуда стоячей волны достигает максимального значения, называются **пучностями** стоячей волны.

Значения координат пучностей

$$x_{пучн} = \pm m \frac{\lambda}{2}, \quad (m=1,2,3\dots). \quad (4.62)$$

Точки среды, в которых амплитуда стоячей волны обращается в ноль, называются **узлами** стоячей волны. Координаты узлов определяются соотношением

$$x_{\text{узл}} = \pm(m + 1/2) \frac{\lambda}{2}. \quad (4.63)$$

Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями равно

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}, \quad (4.64)$$

и называется **длиной стоячей волны**.

В отличие от бегущей волны, все точки которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с запаздыванием по фазе, все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами (синфазно). Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе. Графическое изображение стоячей волны представлено на рисунке 4.15.

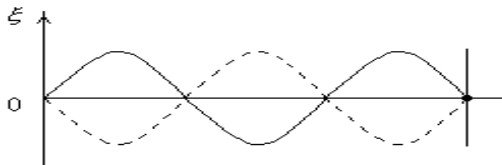


Рис.4.15

В стоячей волне **отсутствует перенос энергии**, так как образующие эту волну падающие и отражённые волны переносят энергию в равных количествах и в противоположных направлениях. Полная энергия колебаний каждого элемента объёма среды, ограниченного соседним узлом и пучностью, не зависит от времени, она лишь периодически переходит из кинетической энергии, сосредоточенной вблизи пучностей, в потенциальную - вблизи узлов волны, где деформация среды достигает максимальных значений.

## 4.2. Электромагнитные колебания и волны

### 4.2.1. Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания

Простейший колебательный контур состоит из конденсатора ёмкостью  $C$  и соединённой с ним последовательно катушки индуктивности  $L$  (рис.4.16). При замыкании на катушку предварительно заряженного конденсатора в контуре возникнут электромагнитные колебания. Конденсатор начинает разряжаться, в катушке появляется нарастающий ток, создающий магнитное поле. Изменяющееся магнитное поле приводит к возникновению ЭДС самоиндукции, которая сначала замедляет скорость разрядки, а после того как конденсатор разрядился, начинает поддерживать ток в прежнем направлении. В результате происходит перезарядка конденсатора. Затем процесс разрядки начнётся снова, но в обратном направлении и т.д.

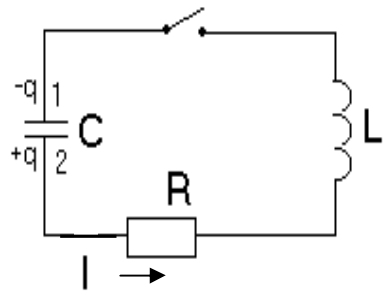


Рис.4.16

Дифференциальное уравнение, описывающее собственные колебания в контуре, можно получить на основе закона Ома для неоднородного участка цепи:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}, \quad (4.65)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  - значения потенциалов на обкладках конденсатора;  $\varepsilon$  - ЭДС самоиндукции, возникающая в контуре.

С учётом того, что  $R=0$ ,  $I = \dot{q}$ ;  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$  и

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \ddot{q}, \text{ уравнение (4.65) принимает вид}$$

$$L \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0, \quad \ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (4.66)$$

После замены  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$  получим **стандартное дифференциальное уравнение, описывающее собственные гармонические колебания**

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.67)$$

Собственная частота и период гармонических колебаний удовлетворяют формуле Томсона

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (4.68)$$

Заряд конденсатора  $q$ , напряжение на обкладках конденсатора  $U$  и сила тока в катушке изменяются по законам

$$q = q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.69)$$

$$U = \frac{q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (4.70)$$

$$I = q \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) = I_0 \sin(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (4.71)$$

где  $q_0/C = U_0$  - амплитуда напряжения,  $I_0 = \omega_0 q_0$  - амплитуда силы тока.

При собственных колебаниях в контуре происходит периодическое преобразование энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки индуктивности и наоборот. Полная энергия электромагнитных колебаний в контуре не изменяется с течением времени

$$W = W_{эл} + W_{м} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} = const. \quad (4.72)$$

## 4.2.2. Затухающие колебания и их характеристики

Реальный колебательный контур всегда обладает активным сопротивлением  $R$ . Вследствие этого часть энергии электромагнитных колебаний превращается в тепло, а амплитуда колебаний постепенно уменьшается.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний на основании (4.65) и с учётом, что  $I = q$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{q}{C}$ ,

$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt} = -L \ddot{q}$ , принимает вид

$$\ddot{L}q + R \dot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (4.73)$$

После замены

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (4.74)$$

получим стандартное дифференциальное уравнение, описывающее затухающие колебания

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.75)$$

Здесь  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0$  – собственная частота свободных незатухающих колебаний (т.е. при  $R=0$ ).

Решение дифференциального уравнения (4.75) имеет вид

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.76)$$

где 
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (4.77)$$

- частота затухающих колебаний в реальном контуре.

График затухающих колебаний представлен на рис.4.17. Амплитуда колебаний в этом случае изменяется по экспоненциальному закону

$$q = q_0 e^{-\beta t}, \quad (4.78)$$

а период колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.79)$$

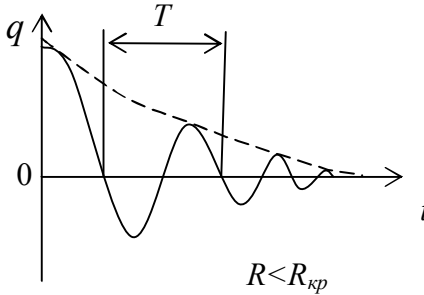


Рис.4.17

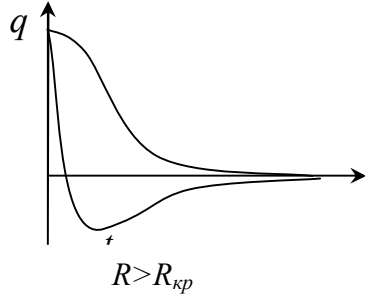


Рис.4.18

С увеличением  $R$ , а следовательно, и  $\beta$ , период затухающих колебаний растёт, стремясь к бесконечности при

$$R \geq R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.80)$$

Это означает, что при  $R \geq R_{кр}$  колебательный разряд переходит в **апериодический процесс** (рис.4.18). Значение  $R_{кр}$  называется **критическим сопротивлением**.

Важнейшей характеристикой контура является его добротность. При малых значениях логарифмического декремента затухания, добротность контура определяется выражением:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (4.81)$$

### 4.2.3. Вынужденные колебания в контуре. Резонанс

Для осуществления вынужденных электромагнитных колебаний нужно включить последовательно с элементами контура источник переменного напряжения, изменяющегося

по гармоническому закону.

$$U = U_0 \cos \omega_e t. \quad (4.82)$$

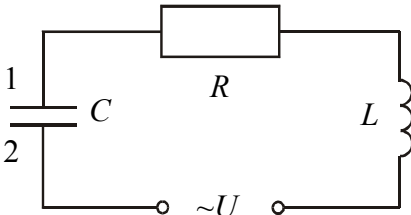


Рис. 4.19

Тогда формула (4.65)

примет вид

$$IR = \frac{-q}{C} - L \dot{q} + U_0 \cos \omega_e t. \quad (4.83)$$

Произведя преобразование, получим стандартное дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний.

$$\ddot{q} + 2\beta \dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega_e t. \quad (4.84)$$

В случае установившихся колебаний **решение дифференциального уравнения имеет**

$$q = q_0 \cos(\omega_e t + \psi), \quad (4.85)$$

где  $\psi$  – сдвиг фаз между зарядом на обкладках конденсатора и переменной ЭДС.

Следовательно, в установившемся режиме, вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающего напряжения  $\omega_e$  и являются гармоническими, амплитуда и фаза которых определяется выражениями

$$q_0 = \frac{U_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\beta^2 \omega_e^2}} = \frac{U_0}{\omega_e \sqrt{R^2 + (\omega_e L - 1/\omega_e C)^2}}, \quad (4.86)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{-2\beta \omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2} = \frac{R}{\omega_e L - 1/\omega_e C}. \quad (4.87)$$

Резонансные кривые для заряда (напряжения на конденсаторе) аналогичны резонансным кривым при механических колебаниях (см. рис.4.13), а резонансная частота определяется по формуле (4.50).

Продифференцировав (4.85) по  $t$ , найдем силу тока в



контуре

$$I = -q_0 \omega_\epsilon \sin(\omega_\epsilon t + \psi) = I_0 \cos(\omega_\epsilon t + \psi + \pi/2),$$

где  $I_0 = q_0 \omega_\epsilon$  – амплитуда тока.

Запишем это выражение в виде

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (4.88)$$

где  $\varphi = -(\psi + \pi/2)$  – сдвиг фаз между током и приложенным напряжением.

Тогда в соответствии с (4.86) и (4.87)

$$I_0 = q_0 \omega = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_\epsilon L - \frac{1}{\omega_\epsilon C}\right)^2}}, \quad (4.89)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_\epsilon L - \frac{1}{\omega_\epsilon C}}{R}. \quad (4.90)$$

Из формулы (4.90) следует, что ток отстаёт по фазе от вынуждающего напряжения в том случае, когда  $\omega_\epsilon L > \frac{1}{\omega_\epsilon C}$ , и

опережает, когда  $\omega_\epsilon L < \frac{1}{\omega_\epsilon C}$ . При условии  $\omega_\epsilon L = \frac{1}{\omega_\epsilon C}$  сдвиг

фаз равен нулю, а амплитуда тока достигает максимального значения.

Разделив выражение (4.85) на ёмкость, получим напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_\epsilon t + \psi) = U_{C_0} \cos(\omega_\epsilon t - \varphi - \frac{\pi}{2}), \quad (4.91)$$

где

$$U_{C_0} = \frac{q_0}{C} = \frac{I_0}{\omega_\epsilon C}. \quad (4.92)$$

Умножив производную функции (4.88) на  $L$ , получим напряжение на индуктивности:

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = \omega L I_0 \sin(\omega_\epsilon t - \varphi) = U_{L_0} \cos(\omega_\epsilon t - \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (4.93)$$

где 
$$U_{L_0} = \omega L I_0. \quad (4.94)$$

Сопоставление формул (4.88), (4.91) и (4.93) показывает, что напряжение на емкости отстает по фазе от силы тока на  $\pi/2$ , а напряжение на индуктивности опережает ток на  $\pi/2$ .

Напряжение на активном сопротивлении изменяется в фазе с током. Фазовые соотношения можно представить очень наглядно с помощью векторной диаграммы (рис. 4.20).

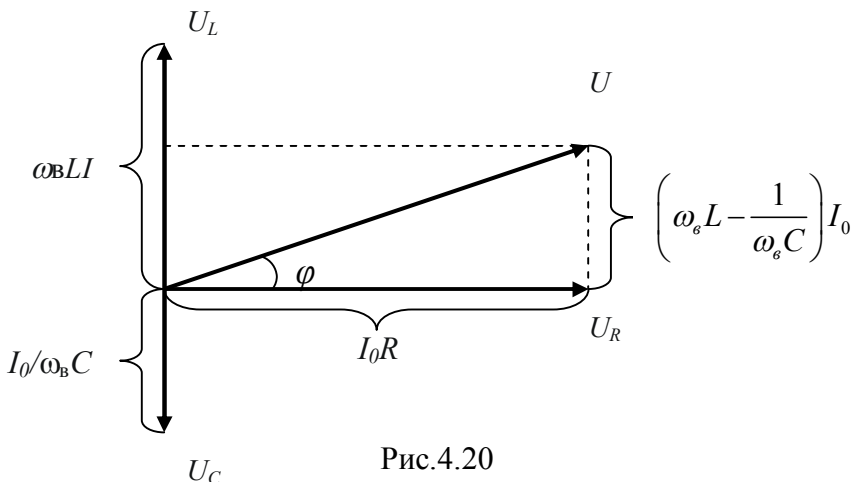


Рис.4.20

Резонансная частота для заряда и напряжения на конденсаторе равна

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (4.95)$$

Резонансные кривые для  $U_c$  изображены на рис.4.21. При  $\omega \rightarrow 0$  резонансные кривые сходятся в одной точке с ординатой  $U_{Cm} = U_0$  – напряжению, возникающему на конденсаторе при подключении его к источнику постоянного напряжения  $U_0$ . Максимум при резонансе получается тем выше и острее, чем меньше  $\beta = R/2L$ .

Резонансные кривые для силы тока изображены на рис. 4.22. Амплитуда силы тока имеет максимальное значение при  $\omega L - 1/\omega C = 0$ .

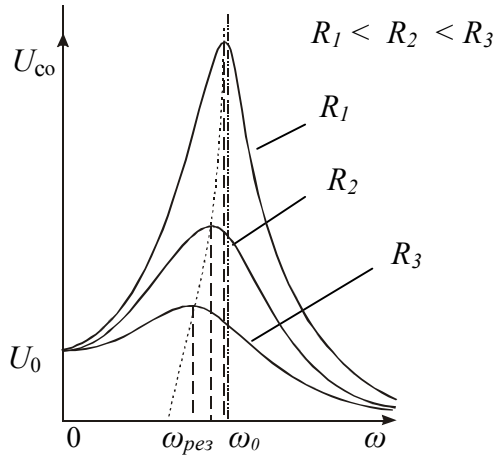


Рис. 4.21

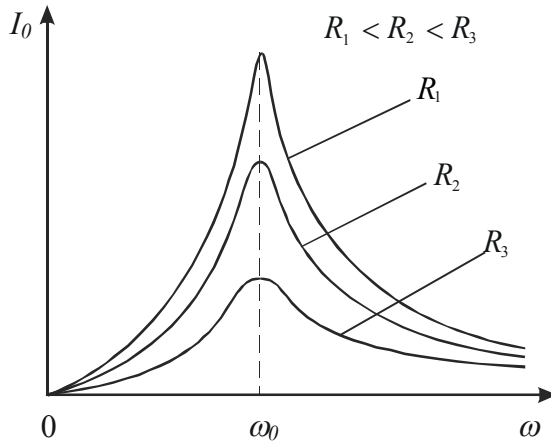


Рис. 4.22

Следовательно, резонансная частота для силы тока совпадает с собственной частотой контура

$$\omega_{рез} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.96)$$

При  $\omega \rightarrow 0$ ,  $I = 0$ , так как при постоянном напряжении установившийся ток в цепи с конденсатором течь не может.

Резонансные свойства контура характеризует **добротность**  $Q$ , которая показывает, во сколько раз напряжение на конденсаторе может превышать приложенное напряжение, т.е.

$$Q = \frac{U_{C \text{ рез}}}{U_0} \quad (4.97)$$

При малых затуханиях  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$  и

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.98)$$

Таким образом, добротность обратно пропорциональна активному сопротивлению контура.

Добротность контура определяет остроту резонансных кривых. На рис. 4.23 изображена одна из резонансных кривых для силы тока в контуре. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствуют току  $I = I_{\text{max}} / \sqrt{2}$ .

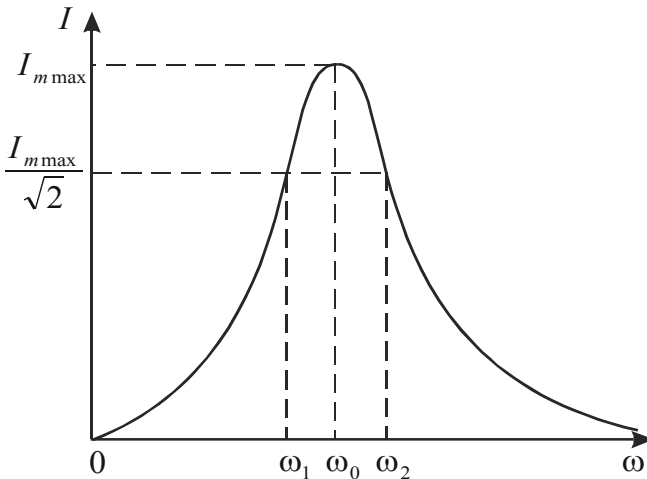


Рис.4.23

Относительная ширина резонансной кривой  $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$  равна величине обратной добротности контура, т. е.

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \quad (4.99)$$

Явление резонанса используют для выделения из сложного напряжения, равного сумме нескольких синусоидальных напряжений, нужной составляющей. Настроив контур (посредством изменения  $R$  и  $C$ ) на требуемую частоту  $\omega_i$ , можно получить на конденсаторе напряжение в  $Q$  раз превышающее значение данной составляющей, в то время как напряжение, создаваемое на конденсаторе другими составляющими, будет слабым. Таким образом, осуществляется, например, настройка радиоприёмника на нужную длину волны.

#### 4.2.4. Электромагнитные волны

Существование электромагнитных волн вытекает из уравнений Максвелла для электромагнитного поля (3.1, 3.4.-3.6.). Если возбуждать с помощью колеблющихся зарядов переменное электромагнитное поле, то возникает последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся в окружающем пространстве от одной точки к другой. Этот периодический во времени и пространстве процесс и представляет собой электромагнитную волну.

Фазовая скорость электромагнитных волн в различных средах определяется формулой

$$g = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (4.100)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  - скорость электромагнитных волн в вакууме.

Электромагнитные волны являются поперечными, поскольку векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  напряжённости электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору скорости распростра-

нения волны, образуя правовинтовую систему (рис.4.24). При этом векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в одинаковых фазах, а их мгновенные значения в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (4.101)$$

Уравнения плоской монохроматической электромагнитной волны имеют вид

$$E = E_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (4.102)$$

$$H = H_m \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (4.103)$$

где  $\omega$ - частота волны,  $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\alpha$ - начальная фаза колебаний.

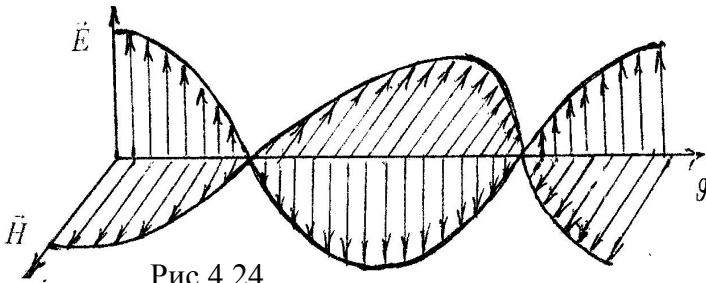


Рис.4.24

Электромагнитные волны переносят энергию. Объёмная плотность энергии электромагнитной волны равна сумме объёмных плотностей энергии электрических и магнитных полей, т.е.

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu H^2 = \frac{EH}{g}. \quad (4.104)$$

Интенсивность монохроматической электромагнитной волны, равная энергии переносимой за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную скорости распространения волны, определяется выражением

$$I = \langle \omega \rangle g, \quad (4.105)$$

где  $\langle \omega \rangle$  - среднее за период значение объёмной плотности энергии.

Поскольку  $\langle \omega \rangle$  прямо пропорционально квадрату

амплитуды напряжённости электрического поля, то и

$$I \sim A^2. \quad (4.106)$$

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является электромагнитный диполь, момент  $\vec{P}_e$  которого изменяется с течением времени. Интенсивность излучения диполя в различных направлениях характеризуется полярной диаграммой направленности излучения диполя (рис.4.25).

Из этой диаграммы видно, сильнее всего диполь излучает в направлении перпендикулярном его оси. Вдоль своей оси диполь не излучает совсем. Мощность излучения диполя пропорциональна четвёртой степени частоты колебаний.

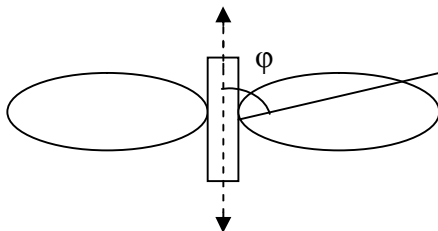


Рис.4.25

В зависимости от частоты (или длины волны  $\lambda = c/\nu$ ), а также способа излучения и регистрации различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны (9-ти диапазонов), световые волны, рентгеновское и  $\gamma$  – излучение.

### 4.3. Примеры решения задач по колебаниям и волнам

**Пример 1.** Частица совершает гармонические колебания вдоль оси  $x$  около положения равновесия  $x=0$ , частота колебания  $\omega_0=4c^{-1}$ . В некоторый момент времени координата частицы  $x_0 = 25$  см и ее скорость  $v_0 = 100$  см/с. Найти координату  $x$  и скорость  $v$  частицы через  $t = 2,4$  с после этого момента.

### Решение

Запишем уравнение гармонических колебаний частицы в виде:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (1)$$

тогда уравнение скорости будет иметь вид:

$$v = \dot{x} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

Для нахождения параметров данных уравнений воспользуемся начальными условиями. При  $t = 0$  имеем:

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos \varphi_0, \\ v_0 &= -A\omega_0 \sin \varphi_0, \end{aligned}$$

откуда  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} = -1$  и  $\varphi_0 = -\pi/4$ ,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}.$$

Координата и скорость частицы  $v$  в момент времени  $t = 2,4$  с найдутся из уравнение (1) и (2):

$$x = -29 \text{ см}, \quad v = -81 \text{ см/с}.$$

**Пример 2.** Точка совершает гармонические колебания вдоль некоторой прямой с периодом  $T = 0,6$  с и амплитудой  $A = 10$  см. Найти среднюю скорость точки за время, в течении которого она проходит путь  $A/2$ :

а) из положения равновесия; б) из крайнего положения.

### Решение

Выберем за начало отсчета времени момент, когда точка проходит положение равновесия. Тогда уравнение колебаний имеет вид:

$$x = A \sin \omega_0 t.$$

Исходя из этого уравнения определим момент времени  $t_1$ , соответствующий смещению точки  $x = A/2$ . Имеем:

$$\frac{A}{2} = A \sin \frac{2\pi}{T} t_1,$$

откуда  $t_1 = T/12$ .



Значение средней скорости точки при ее движении из положения равновесия определяется из формулы:

$$v_{cp1} = \frac{S}{t} = \frac{A}{2t_1}; \quad v_{cp1} = 100 \text{ см/с.}$$

Время движения точки из крайнего положения до половины амплитуды будет равно:

$$t_2 = \frac{T}{4} - t_1 = \frac{T}{16}.$$

С учетом этого:

$$v_{cp2} = \frac{A}{2t_2}; \quad v_{cp2} = 50 \text{ см/с.}$$

Аналогичные результаты могут быть получены при использовании формулы:

$$v_{cp} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

**Пример 3.** Найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух одинаково направленных колебаний, выражаемых уравнениями:  $x_1 = 3\cos(\omega t + \pi/3)$  см,  $x_2 = 8\sin(\omega t + \pi/3)$  см. Написать уравнение результирующего колебания.

### Решение

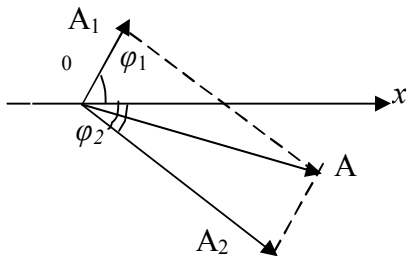
Вначале, используя тригонометрические формулы, приведем уравнение второго колебания к виду

$$x_2 = 8 \cos(\omega t - \pi/6) \text{ см.}$$

Затем построим векторную диаграмму сложения однонаправленных колебаний (см.рис.). Согласно теореме косинусов получим

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi},$$

где  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .



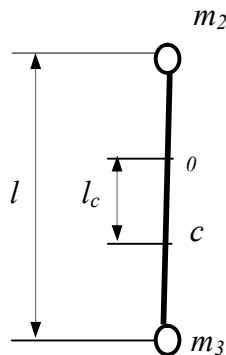
Произведя вычисления, найдем  $A = 8,5$  см. Тангенс начальной фазы результирующего колебания определится из рисунка

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}, \quad \text{откуда } \varphi = -0.2 \text{ рад.}$$

Уравнение результирующего колебания запишется в виде:

$$x = 8,5 \cos(\omega t - 0.2) \text{ см.}$$

**Пример 4.** На концах тонкого стержня длиной  $l = 1$  м и массой  $m_1 = 0,4$  кг укреплены шарики малых размеров массами  $m_2 = 0,2$  кг и  $m_3 = 0,4$  кг. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить период колебаний, совершаемых стержнем.



### Решение

Стержень с шариком (см. рис.) представляет собой физический маятник, период колебаний которого определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl_c}},$$

где  $I$  - момент инерции маятника относительно оси колебаний;  $m$  - масса;  $l_c$  - расстояние от центра масс маятника до оси.

Принимая шарики за материальные точки, общий момент инерции маятника определяем выражением

$$I = (1/12)m_1 l^2 + m_2 (l/2)^2 + m_3 (l/2)^2 = (1/12) l^2 (m_1 + 3m_2 + 3m_3),$$

$$I = 158 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Масса маятника  $m = m_1 + m_2 + m_3 = 0,9$  кг.

Расстояние  $l_c$  от оси маятника до его центра масс равно

$$l_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2(-l/2) + m_3(l/2)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_3 - m_2)l}{2m}$$

Произведя вычисления, найдем  $l_c = 5,55$  см,  $T = 11,2$  с.

**Пример 5.** Тело массой  $m = 5$  г совершает затухающие колебания. В течении времени  $t = 50$  с тело потеряло 60 % своей энергии. Определить коэффициент сопротивления  $r$ .

### Решение

Энергия тела, совершающего колебания, определяется по формуле

$$E = mA^2 \omega^2 / 2.$$

Учитывая зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени  $A = A_0 e^{-\beta t}$ ,

получим  $E = mA_0 e^{-2\beta t} \omega^2 / 2$ , или

$$E = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (1)$$

где  $E_0 = mA_0^2 \omega^2 / 2$  – энергия тела в момент времени  $t = 0$ .

К моменту времени  $t = 50$  с тело потеряло 60 % своей перво-начальной энергии, следовательно,

$$E = 0,4E_0. \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2), сокращая на  $E_0$  и, логарифмируя обе части равенства, найдем:

$$\ln 2,5 = 2\beta t.$$

Отсюда выражаем  $\beta$ :

$$\beta = (\ln 2,5) / 2t. \quad (3)$$

С другой стороны,  $\beta = r / 2m$ . (4)

Из сравнения (3) и (4) получим  $r = (m \ln 2,5) / t$

После подстановки числовых значений найдем

$$r = 9,16 \cdot 10^{-5} \text{ кг/с.}$$

**Пример 6.** Тело массой  $m = 10$  г совершает затухающие колебания с максимальным значением амплитуды 7 см, начальной фазой, равной нулю, коэффициентом затухания, равным  $1,6 \text{ с}^{-1}$ . На это тело начала действовать внешняя периодическая сила, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид  $x = 5 \sin(10\pi t - 0,75\pi)$  см. Найти: 1) уравнение свободных колебаний; 2) уравнение внешней периодической силы.

### Решение

Уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  - частота затухающих колебаний;  $\omega_0$  - собственная частота колебаний;  $\beta$  - коэффициент затухания.

По условию сдвиг фаз  $\varphi$  между собственными и вынужденными колебаниями равен  $-3\pi/4$ ; следовательно,  $\text{tg}(-3\pi/4) = 1$ . С другой стороны,

$$\text{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2}.$$

Из равенства

$$\frac{2\beta\omega_a}{\omega_0^2 - \omega_a^2} = 1,$$

следует 
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_a^2 + 2\beta\omega_a}. \quad (2)$$

У нас  $\omega_a = 10\pi$ ,  $\beta = 1,6 \text{ с}^{-1}$ . Подставляя эти значения в (2), получим, что  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , получим, что частота  $\omega$  затухающих колебаний равна частоте  $\omega_0$  собственных колебаний. Следовательно, уравнение свободных затухающих колебаний примет вид

$$x = 7 e^{-1,6t} \sin 10,5 \pi t \text{ см.}$$

Уравнение внешней периодической силы

$$F = F_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

Амплитудное значение вынуждающей силы

$$F_0 = f_0 m = Am\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_a^2)^2 + 4\beta^2 \omega_a^2}. \quad (4)$$

После подстановки числовых значений получаем  $F_0 = 72 \text{ мН}$ . С учетом этого уравнение внешней периодической силы будет иметь вид

$$F = 72 \sin 10\pi t \text{ мН}.$$

**Пример 7.** Сила, действующая на материальную точку, изменяется по гармоническому закону  $F = F_0 \sin \omega t$ . В начальный момент времени скорость точки равна нулю. Как с течением времени изменяется скорость и положение точки?

### Решение

По второму закону Ньютона

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}, \quad \text{или} \quad F_0 \sin \omega t = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

Отсюда  $dv = \frac{F_0}{m} \sin \omega t dt$ , тогда скорость колеблющейся

точки 
$$v = \int dv = \int_0^t \frac{F_0}{m} \sin \omega t dt = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t). \quad (2)$$

Обозначая  $\frac{F_0}{m\omega} = v_m$ , перепишем (2) в виде

$$v = v_m (1 - \cos \omega t).$$

График изменение скорости представлен на рис. 1

Если начальное положение точки принять за начало координат, то координата точки в любой момент времени определяется выражением

$$x = \int_0^t v dt = v_m \int_0^t (1 - \cos \omega t) dt = v_m t - \frac{v_m}{\omega} \sin \omega t.$$

Таким образом, движение точки под действием периодической силы является поступательным с периодическим возрастанием скорости от 0 до  $2v_m$ , а затем снова до 0 (рис. 2.).

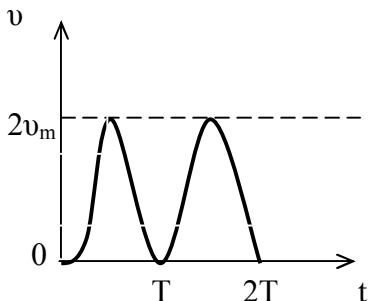


Рис. 1

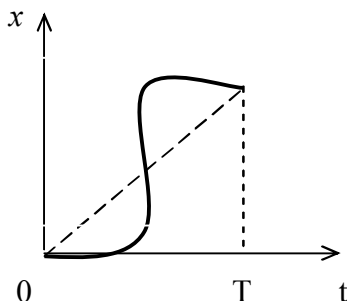


Рис. 2

**Пример 8.** Плоская волна распространяется вдоль прямой со скоростью  $v = 20$  м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии  $x_1 = 12$  м и  $x_2 = 15$  м от источника волн, колеблются с разностью фаз  $\Delta\varphi = 0,75\pi$ . Найти длину волны  $\lambda$ , написать уравнение волны и найти смещение указанных точек в момент  $t = 1,2$  с, если амплитуда колебаний  $A = 0,1$  м.

#### Решение

Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны  $\lambda$ , колеблются с разностью фаз, равной  $2\pi$ ; точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии  $\Delta x$ , колеблются с разностью фаз, равной

$$\Delta\varphi = \Delta x \cdot 2\pi/\lambda = (x_2 - x_1) \cdot 2\pi/\lambda.$$

Решая это равенство относительно  $\lambda$ , получим

$$\lambda = 2\pi(x_2 - x_1)/\Delta\varphi. \quad (1)$$

Подставляя числовые значения величин, входящих в выражение (1), получим  $\lambda = 8$  м.

Для того, чтобы написать уравнение плоской волны, надо ещё найти циклическую частоту  $\omega$ . Так как  $\omega = 2\pi/T$  ( $T = \lambda/v$  – период колебаний), то

$$\omega = 2\pi v/\lambda.$$

Произведя вычисления, найдём

$$\omega = 2\pi \cdot 20/8 = 5\pi \text{ с}^{-1}.$$

Зная амплитуду колебаний  $A$ , циклическую частоту  $\omega$  скорость распространения волны  $v$ , можно написать уравнение плоской волны для данного случая

$$y = A \cos \omega(t - x/v), \quad (2)$$

где  $A = 0,1 \text{ м}$ ,  $\omega = 5\pi \text{ с}^{-1}$ ,  $v = 20 \text{ м/с}$ .

Чтобы найти смещение указанных точек  $y$ , достаточно в уравнение (2) подставить значения  $t$  и  $x$ :

$$y_1 = -0,1 \text{ м}; \quad y_2 = 7,1 \text{ см}.$$

**Пример 9.** Омическое сопротивление контура  $R = 10^2 \text{ Ом}$ , индуктивность  $L = 10^{-2} \text{ Гн}$ , ёмкость  $C = 10^{-6} \text{ Ф}$ . Определить силу тока в контуре в момент времени  $t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ , если при  $t = 0$  заряд на конденсаторе  $q_0 = 10^{-5} \text{ Кл}$ , а начальная сила тока равна нулю.

### Решение

Общий вид уравнения затухающих колебаний в контуре запишем в виде:

$$q = q_m e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где  $\beta = R/2L = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ,

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = 8,7 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Начальную фазу  $\varphi_0$  и амплитудное значение заряда  $q_m$  определим из начальных условий. Учитывая, что при  $t = 0$   $q = q_0$ , получаем

$$q_0 = q_m \sin \varphi_0. \quad (2)$$

Найдём выражение для силы тока

$$I = -q_m \left[ -\beta e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega t^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \right]. \quad (3)$$

Так как при  $t = 0$  и  $I = 0$ , получаем

$$-\beta \sin \varphi_0 + \omega \cos \varphi_0 = 0.$$

Откуда  $\operatorname{tg} \varphi_0 = \omega / \beta$  и  $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(\omega / \beta) \approx \pi/3$ .

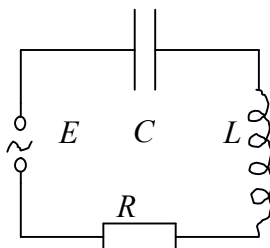
Наконец, из (2) находим

$$q_m = \frac{q_0}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2q_0}{\sqrt{3}}.$$

С учётом найденных параметров уравнения (3) определим силу тока в контуре в момент времени

$$t = 5 \cdot 10^{-5} \text{ с}, \quad I = 4,6 \cdot 10^{-2} \text{ А}.$$

**Пример 10.** В цепи, состоящей из последовательно соединённых резистора  $R=20$  Ом, катушки индуктивностью  $L=1$  мГн и конденсатора ёмкостью  $C=0,1$  мкФ, действует синусоидальная ЭДС. Определите частоту  $\omega$  ЭДС, при которой в цепи наступит резонанс. Найдите действующие значения силы тока  $I$  и напряжений  $U_R$ ,  $U_L$ ,  $U_C$  на всех элементах цепи при резонансе, если при этом действующее значение ЭДС  $E = 30$  В.



### Решение

Под действием переменной ЭДС в цепи установятся вынужденные колебания. При этом амплитудные значения тока  $I_0$  и ЭДС  $E_0$  связаны соотношениями

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

В соответствии с формулами, связывающими амплитудные и действующие значения токов и напряжений ( $I_D = I_0/\sqrt{2}$ ,  $E_D = E_0/\sqrt{2}$ ), данное соотношение имеет аналогичный вид и для действующих значений:



$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.$$

Максимальному току при резонансе  $I_{рез}$  соответствует такое значение  $\omega$ , при котором выполняется условие

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0, \text{ откуда } \omega = \omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 1 \cdot 10^5 \text{ рад/с}.$$

При этом сила тока  $I_p = \frac{E}{\sqrt{R^2}} = \frac{E}{R} = 1,5 \text{ А}$ . Зная силу тока

$I_p$ , найдём действующие значения напряжения на каждом из элементов контура. В соответствии с законом Ома для каждого из участков получим:

$$U_R = I_p \cdot R = E = 30 \text{ В},$$

$$U_L = I_p \cdot L\omega = \frac{E}{R} L\omega = 150 \text{ В},$$

$$U_C = I_p \cdot \frac{1}{C\omega} = U_L = 150 \text{ В}.$$

Равенство  $U_L = U_C$  следует из равенства  $L\omega = 1/\omega C$  при резонансе.

## 5. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

### 5.1. Световая волна. Когерентность и монохроматичность световых волн

Свет представляет собой электромагнитную волну, в которой происходят колебания векторов напряженности электрического и магнитного полей. Однако, как показывает опыт, различные действия света (физиологическое, фотохимическое, фотоэлектрическое и др.) вызываются колебаниями электрического вектора. Поэтому в дальнейшем этот

вектор будем называть световым вектором, а плоскую световую волну описывать лишь одним уравнением

$$E = A \cos(\omega t - kx + \alpha), \quad (5.1)$$

где  $A$  - амплитуда светового вектора,  $\omega = 2\pi\nu$  - частота колебаний,  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число.

Длины и частоты видимого света лежат в пределах  $\lambda_0 = (400 \div 750)_{нм}$  и  $\nu = (0,75 \div 0,40) \cdot 10^{15} Гц$ .

Скорость распространения света в вакууме есть одна из важнейших констант физики и равна  $c \approx 3 \cdot 10^8 м/с$ . В других средах она меньше и определяется по формуле

$$\nu = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = c/n, \quad (5.2)$$

где  $n$  - показатель преломления среды.

Для всех прозрачных сред  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

При переходе света из одной среды в другую частота колебаний  $\nu$  в световой волне сохраняется, но длина волны изменяется

$$\lambda = \frac{\nu}{\nu} = \frac{c}{\nu n} = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (5.3)$$

Средний по времени световой поток через единицу поверхности площадки, перпендикулярной к направлению распространения волны, носит название **интенсивности света**. Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды световой волны

$$I = nA^2, \quad (5.4)$$

где  $n$  - показатель преломления среды.

Световая волна, описываемая уравнением (5.1), называется монохроматической. Однако, ни один реальный источник (исключая лазерный) не даёт строго монохроматического света. Реальное излучение содержит в себе ни одну определённую частоту, а некоторый набор частот. Чем уже интервал частот  $\Delta\nu$ , тем более монохроматичным оно

является.

Причина некогерентности излучения всякого источника, кроме лазерного, заключается в самом механизме испускания света. Излучение светящегося тела складывается из волн, испускаемых атомами. Излучение отдельного атома продолжается  $\tau \approx 10^{-8} \text{ с}$ . За это время образуется цуг протяжённостью  $c\tau \approx 3 \text{ м}$ . Одновременно излучает большое количество атомов. Возбуждаемые ими цуги, налагаясь друг на друга, образуют световую волну. Фаза реальной световой волны изменяется с течением времени, поскольку излучение одной группы атомов сменяется излучением другой. Время, за которое случайные изменения фазы в световой волне достигают значения  $\approx \pi$ , называют **временем когерентности**. За это время волна становится некогерентной к самой себе. Таким образом, время когерентности гораздо меньше времени излучения одного цуга.

## 5.2. Интерференция света

### 5.2.1. Условия максимума и минимума интерференции

Явление интерференции состоит в наложении световых волн с перераспределением светового потока в пространстве, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других минимумы интенсивности.

Необходимые условия интерференции:

- когерентность световых волн, т.е. равенство частот и постоянство разности фаз;
- поляризация световых волн в одной плоскости, т.е. чтобы колебания светового вектора  $\vec{E}$  интерферирующих волн совершались вдоль одного и того же направления.

Волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда некогерентны и не являются поляризованными. Причина заключается в механизме испускания света атомами светящегося тела. Поэтому для осуществления интерференции

необходимо волну, излучаемую реальным источником, разделить на две и заставить их пройти различные оптические пути, а затем наложить друг на друга.

**Оптическим путем** называется произведение показателя преломления среды  $n$  на геометрическую длину пути луча  $S$  в данной среде:

$$L = n \cdot S \quad (5.5)$$

Разность оптических длин, проходимых волнами путей, называется оптической разностью хода:

$$\Delta = n_2 S_2 - n_1 S_1. \quad (5.6)$$

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в точке  $O$ , а наложение волн в точке  $P$  (рис.5.1). Если  $\omega t$  - фаза колебания в точке  $O$ , тогда первая волна возбудит в точке  $P$  колебание

$$\xi_1 = A_1 \cos \omega \left( t - \frac{S_1}{v_1} \right), \quad (5.7)$$

а вторая – колебание

$$\xi_2 = A_2 \cos \omega \left( t - \frac{S_2}{v_2} \right), \quad (5.8)$$

где  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  и  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  -

фазовые скорости волн,  $A_1$  и  $A_2$  - амплитуды световых волн.

Амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad (5.9)$$

где  $\alpha_2 = \frac{\omega S_2}{v_2}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\omega S_1}{v_1}$ .

Разность фаз колебаний в точке  $P$  равна

$$\delta = \omega \left( \frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (n_2 S_2 - n_1 S_1)$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , а  $c \cdot T = \lambda$ , получим

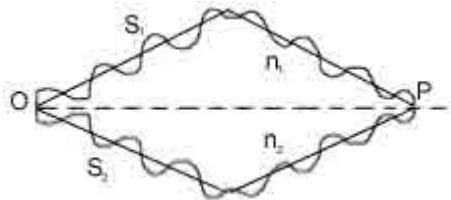


Рис. 5.1

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta. \quad (5.10)$$

Если разность фаз  $\delta$  кратна  $2\pi$ , то в точке  $P$  колебания усиливают друг друга

$$\delta = k \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

отсюда следует **условие максимума интерференции**

$$\Delta = \pm k\lambda, \quad (5.11)$$

где  $k=0,1,2,\dots$

Если  $\delta$  кратна нечетному числу  $\pi$ , то колебания ослабляют друг друга

$$\delta = (2k+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta,$$

отсюда получаем **условие минимума интерференции**

$$\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad (5.12)$$

где  $k = 0,1,2,\dots$

## 5.2.2. Способы получения когерентных световых волн

### а) Метод зеркал Френеля

Два плоских зеркала  $OM$  и  $ON$  располагают так, что их отражающие поверхности образуют угол, близкий к  $180^\circ$  (рис.5.2). Параллельно линии пересечения зеркал на расстоянии  $r$  помещают прямолинейный источник света  $S$ . Зеркала отбрасывают на экран две цилиндрические когерентные волны, распространяющиеся так, как если бы они исходили из мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ . Область, в которой волны перекрываются, называется полем интерференции.

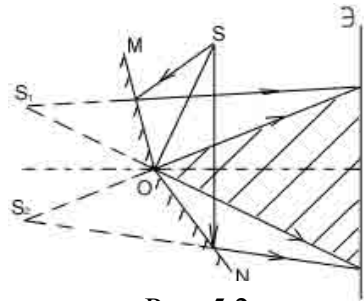


Рис. 5.2

### б) Бипризма Френеля

Бипризма представляет собой две призмы с малыми преломляющими углами  $\alpha$  ( $\alpha \approx 30'$ ), сложенные своими основаниями (рис.5.3). Параллельно основанию на расстоянии  $r$  от него располагается прямолинейный источник света  $S$ . Падающий от него пучок света вследствие преломления в бипризме разделяется на два перекрывающихся пучка, как бы исходящих из двух мнимых источников  $S_1$  и  $S_2$ .

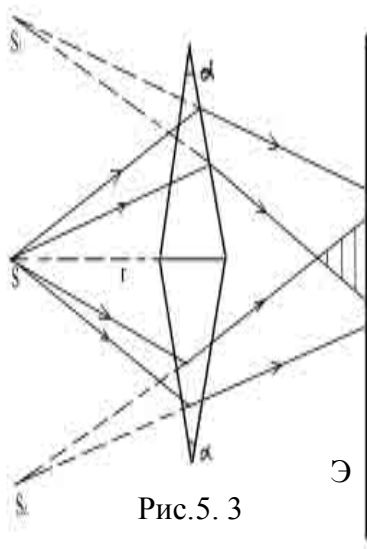


Рис.5.3

### в) Метод Юнга.

Источником когерентных волн являются две узкие щели  $S_1$  и  $S_2$  в непрозрачном экране  $A$  (рис.5.4). Первичным источником света служит ярко освещенная щель  $S$ , которая параллельна щелям  $S_1$  и  $S_2$  и находится от них на одинаковом расстоянии.

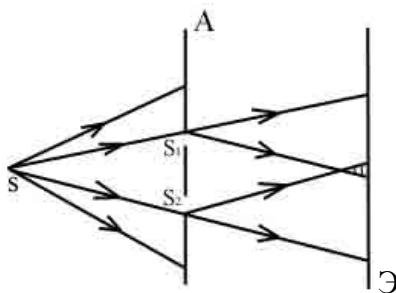


Рис.5.4

### 5.2.3. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников

Рассмотрим две цилиндрические когерентные световые волны, исходящие из источников  $S_1$  и  $S_2$ , имеющих вид

параллельных светящихся тонких нитей или узких щелей (рис.5.5). Наблюдаемая на экране интерференционная картина имеет вид чередующихся светлых и темных полос, параллельных щелям. Найдем ширину полос, предполагая, что экран параллелен плоскости, проходящей через источники  $S_1$  и  $S_2$ .

Положение точки на экране будем характеризовать координатой  $y$ . За начало отсчета выберем точку  $O$ , относительно которой  $S_1$  и  $S_2$  расположены симметрично. Пусть  $L \gg l$ .

Из рис. 5.5 следует, что

$$r_1^2 = L^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2, \quad (5.13)$$

$$r_2^2 = L^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2. \quad (5.14)$$

Вычтем (5.14) из (5.13).

Получим:

$$r_2^2 - r_1^2 = 2yl. \quad (5.15)$$

Или

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 2yl.$$

Откуда

$$r_2 - r_1 = \frac{2yl}{r_2 + r_1}. \quad (5.16)$$

Четкая интерференционная картина наблюдается вблизи середины экрана. Поэтому, можно считать, что  $y \ll L$ , а  $r_1 + r_2 \approx 2L$ . Тогда

$$r_2 - r_1 \approx \frac{2yl}{2L} = \frac{yl}{L}. \quad (5.17)$$

В среде с показателем преломления  $n=1$ ,  $r_2 - r_1 = \Delta$ . Следовательно

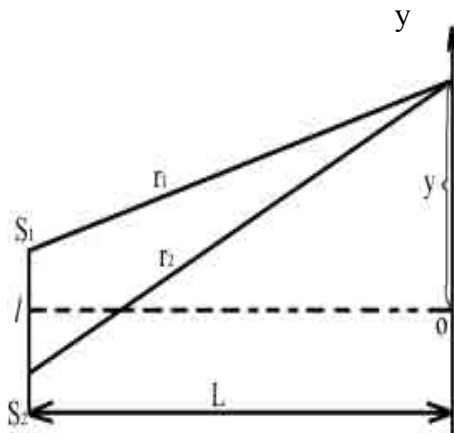


Рис.5. 5

$$\Delta = \frac{yl}{L} \quad (5.18)$$

Подставив (5.18) в условие максимума (5.11) и минимума интерференции (5.12), получим координаты максимумов и минимумов интенсивности

$$y_{\max} = \pm \frac{k\lambda_0 L}{l}, (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.19)$$

$$y_{\min} = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 L}{l}, (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.20)$$

Расстояние между соседними максимумами или минимумами называют шириной интерференционной полосы  $\Delta y$

$$\Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{L\lambda_0}{l} \quad (5.21)$$

При постоянных  $L$  и  $\lambda_0$  уменьшение расстояния  $l$  между источниками приводит к уширению полосы, т.е. картина становится более четкой.

#### 5.2.4. Интерференция в тонких пленках

Пусть на тонкую прозрачную пленку с показателем преломления  $n$  и толщиной  $d$  падает плоская монохроматическая волна, представленная лучом 1 (рис. 5.6).

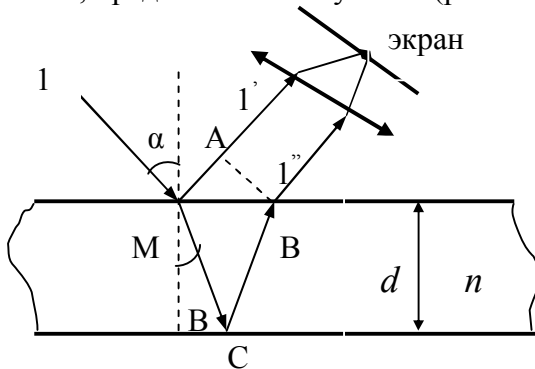


Рис.5.6



Интерференция возникает в результате наложения когерентных волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей пленки (лучи 1' и 1'').

Оптическая разность хода лучей 1' и 1'' возникает на пути от точки М до плоскости АВ, которая представляет собой фронт отраженных волн,

$$\Delta = n(MC + CB) - MA - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (5.22)$$

Потеря полуволны  $\frac{\lambda_0}{2}$  происходит в точке М за счет отражения от более плотной среды.

Так как  $MC = CB = \frac{d}{\cos \beta}$ , а  $MA = MB \sin \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha$ ,

то

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos \beta} - 2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (5.23)$$

Из закона преломления света следует, что  $\sin i = n \sin \beta$ .

С учетом последнего получим

$$\Delta = 2dn \cos \beta - \frac{\lambda_0}{2}, \quad (5.24)$$

или

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (5.25)$$

На экране будет наблюдаться максимум интенсивности отраженных лучей, если  $\Delta = \pm k \lambda_0$

или

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda_0, \quad (5.26)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Условием минимума интенсивности является

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = \pm k \lambda_0, \quad (5.27)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Интерференция в тонких пленках наблюдается не только в отраженном, но и в проходящем свете. Оптическая разность хода для проходящего света отличается от  $\Delta$  для отраженных лучей (5.25) на  $\lambda_0/2$ .

Следовательно, максимумам интерференции в отраженном свете соответствуют минимумы в проходящем свете и наоборот.

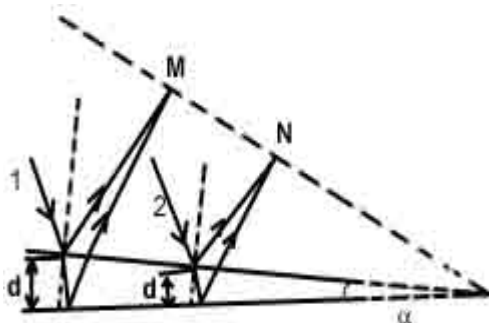


Рис. 5.7

### 5.2.5. Полосы равной толщины. Кольца Ньютона

Пусть прозрачная пленка имеет форму клина с углом при вершине  $\alpha$ . На нее падает плоская волна, ограниченная параллельными лучами 1 и 2 (рис.5.7), которые отразившись от верхней и нижней поверхностях клина будут интерферировать в точках М и N. При небольшом угле  $\alpha$  оптическую разность хода интерферирующих лучей можно вычислить по формулам (5.24) и (5.25). При этом под  $d$  понимают толщину клина в месте падения светового луча, а под  $\beta$  - угол падения на нижнюю поверхность клина. Если расположить экран так, чтобы он был сопряжен с поверхностью, проходящей через точки М и N, то на нем возникнет система светлых и темных полос. Каждая из полос образуется за счет отражения от мест пленки (пластинки), имеющей одинаковую толщину. Поэтому интерференционная картина носит **название полос равной толщины**.

Частным случаем полос равной толщины являются **кольца Ньютона**.

Они наблюдаются при отражении света от соприкасающихся друг с другом плоскопараллельной толстой стеклянной

пластины и плоско-выпуклой линзы с большим радиусом кривизны. Роль тонкой пленки, от поверхностей которой отражаются когерентные волны, играет воздушный зазор между пластинкой и линзой (рис.5.8). При падении света по нормали к пластинке  $\cos \beta = 1$ , тогда при  $n = 1$  выражение (5.24) для оптической разности хода примет вид

$$\Delta = 2d + \frac{\lambda}{2}. \quad (5.28)$$

Второе слагаемое в формуле (5.24) берется со знаком плюс, так как потеря полуволны происходит при отражении от нижней поверхности клина.

Из рис. 5.8 следует, что

$$R^2 = (R - d)^2 + r^2 = R^2 + r^2 - 2dR + d^2,$$

где  $r$  - радиус кольца Ньютона, всем точкам которого соответствует зазор  $d$ ,  $R$  - радиус кривизны линзы.

Ввиду малости  $d$  величиной  $d^2$  пренебрегаем по сравнению с  $2dR$ . Тогда получим

$$d = \frac{r^2}{2R}. \quad (5.29)$$

Выражение (5.28) для оптической разности хода примет вид

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2}. \quad (5.30)$$

В точках, для которых  $\Delta = k\lambda_0$ , возникнут максимумы, а в точках, для которых  $\Delta = (k + \frac{1}{2})\lambda_0$  - минимумы интенсивности.

Из условия интерференции определим радиусы светлых колец Ньютона:

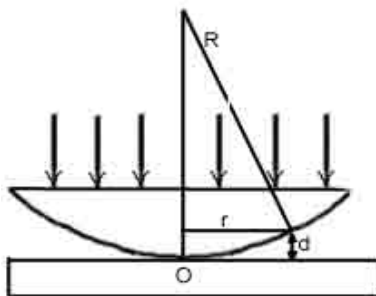


Рис. 5.8

$$\frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = k\lambda_0,$$

отсюда радиусы светлых колец в отраженном свете

$$r_{ce} = \sqrt{R(2k-1)\frac{\lambda_0}{2}}, \quad k=1,2,\dots \quad (5.31)$$

Аналогично

$$\frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_0,$$

отсюда радиусы темных колец в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{Rk\lambda_0}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (5.32)$$

При наблюдении интерференции в проходящем свете потери полудлины волны  $\frac{\lambda_0}{2}$  не происходит и разность хода между интерферирующими лучами

$$\Delta = 2d. \quad (5.33)$$

При этом радиусы светлых и темных колец в проходящем свете определяются соответственно формулами

$$r_{ce} = \sqrt{Rk\lambda_0}, \quad k=1,2,3,\dots \quad (5.34)$$

$$r_m = \sqrt{R(2k-1)\frac{\lambda_0}{2}}, \quad k=1,2,\dots \quad (5.35)$$

Правильная форма колец Ньютона легко искажается при всяких незначительных дефектах в обработке выпуклой поверхности линзы и верхней поверхности пластины. Поэтому наблюдение за формой колец Ньютона позволяет осуществлять быстрый и точный контроль качества шлифовки плоских пластин и линз.

## 5.2.6. Применение интерференции

### а) Интерферометры

Явление интерференции света используется в ряде весьма точных измерительных приборов, получивших название интерферометров. На рисунке 5.9 представлена принципиальная схема интерферометра Майкельсона. Он состоит из двух плоских зеркал  $M_1$  и  $M_2$  и полупрозрачной пластинки  $P_1$ . Свет от источника падает на пластинку  $P_1$  под углом  $45^\circ$  и разделяется на два луча.

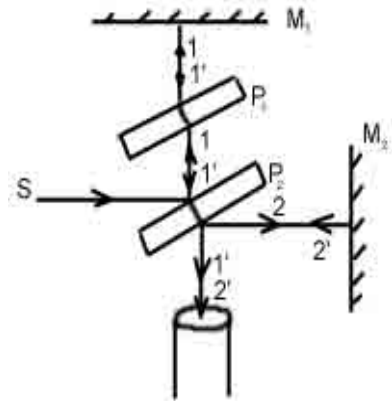


Рис. 5.9

После отражения от зеркал  $M_1$  и  $M_2$  лучи 1' и 2' выходят из пластинки  $P_1$  и направляются в зрительную трубу. Луч 1 проходит через пластинку  $P_1$  только один раз, в то время как луч 2 — три раза. С целью создания идентичных условий для обоих лучей на пути луча 1 помещают пластинку  $P_2$ , имеющую такую же толщину, что и  $P_1$  (компенсатор).

Лучи, приходящие в зрительную трубу 1' и 2', когерентны. Результат их интерференции зависит от оптической разности хода лучей. Перемещая одно из зеркал параллельно самому себе, можно наблюдать изменение интерференционной картины. Поэтому интерферометр Майкельсона можно использовать для точных измерений длин ( $\approx 10^{-9}$  м).

### б) Просветление оптики

В современных оптических системах из-за большого числа отражающих поверхностей интенсивность проходящего света ослабляется, т.е. уменьшается светосила прибора.

Явление интерференции позволяет свести к минимуму коэффициент отражения поверхностей. Для этого осуществляется «просветление» оптики. На отражающую поверхность (например, линзы) наносится тонкая пленка с коэффициентом преломления  $n$ , меньшим, чем у материала линзы  $n_0$ .

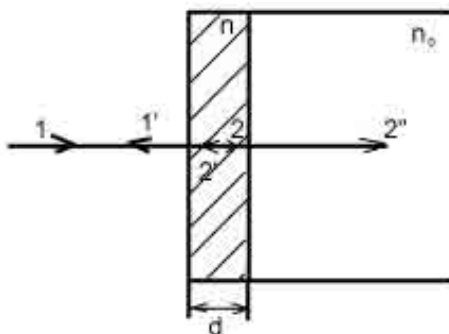


Рис. 5.10

Падающий на поверхность пленки луч 1 частично отражается от внешней и внутренней границы просветляющего слоя. Вследствие когерентности отраженных лучей 1' и 2', возникает интерференция, результат которой определяется толщиной пленки  $d$  и значениями коэффициентов  $n$  и  $n_0$ . Если  $d$ ,  $n$  и  $n_0$  подобрать так, чтобы отраженные волны 1' и 2' находились в противофазе, то произойдет их взаимное ослабление, в результате чего уменьшится коэффициент отражения. Полное гашение волн 1' и 2' наблюдается при условии  $n = \sqrt{n_0}$ . Так как наибольшей чувствительности глаза соответствует зеленый свет с  $\lambda_3 = 5,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ , то толщину пленки  $d$  подбирают равной  $1/4$  указанной длины волны. Для краев видимого спектра (красных и фиолетовых лучей) условие минимума интерференции не выполняется, эти лучи будут отражаться. Поэтому просветленная оптика имеет красно-фиолетовую окраску.

## 5.3. Дифракция света

### 5.3.1. Принцип Гюйгенса-Френеля

**Дифракцией света** называется совокупность явлений, связанных с огибанием световыми волнами препятствий, их проникновением в область геометрической тени и образованием максимумов и минимумов интенсивности.

Огибание светом препятствия можно объяснить с помощью **принципа Гюйгенса**, согласно которому каждая точка фронта волны является элементарным источником вторичных волн (рис.5.11). Огибающая вторичных волн образует новый фронт волны. Однако принцип Гюйгенса не в состоянии решить задачу по определению интенсивности волн.

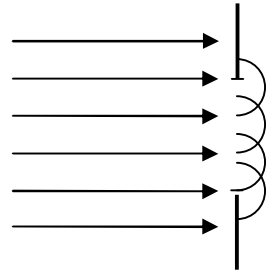


Рис. 5.11

Френель дополнил принцип Гюйгенса представлением об интерференции вторичных волн.

Содержание **принципа Гюйгенса-Френеля** составляют следующие три утверждения:

1. Реальный источник света  $S_0$  можно заменить эквивалентной системой фиктивных вторичных источников и возбуждаемых ими вторичных волн. В качестве вторичных источников можно выбрать малые участки  $dS$  любой замкнутой поверхности охватывающей источник (рис.5.12). Выбор поверхности произволен, но целесообразно её совмещать с одной из волновых поверхностей, соответствующих реальному

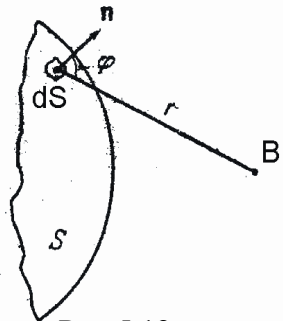


Рис.5.12

источнику  $S_0$ . При этом фазы колебаний всех вторичных источников будут одинаковы.

2. Вторичные источники, эквивалентные одному и тому же источнику  $S_0$ , когерентны между собой. Поэтому волны, распространяющиеся от вторичных источников, интерферируют при наложении, приводя к образованию максимумов и минимумов интенсивности.

3. Амплитуда колебаний  $dA$ , возбуждаемых в точке наблюдения, пропорциональна площади  $dS$  соответствующего участка волновой поверхности и зависит от угла  $\varphi$  между внешней нормалью к волновой поверхности и направлением распространения света

$$dA = f(\varphi) \frac{adS}{r}, \quad (5.36)$$

где  $a$  - величина, пропорциональная амплитуде первичной волны в точках элемента  $dS$ ,  $r$  - расстояние до точки наблюдения,  $f(\varphi)$  - монотонно убывает от 1 при  $\varphi=0$  до 0 при  $\varphi = \pi/2$ .

### 5.3.2. Прямолинейное распространение света. Метод зон Френеля

С помощью принципа Гюйгенса Френеля можно обосновать с волновой точки зрения закон прямолинейного распространения света.

Пусть свет от точечного источника  $S_0$  распространяется в точку М. Амплитуда колебаний в этой точке зависит от результата интерференции вторичных волн. Френель предложил в качестве вторичных источников рассматривать кольцевые зоны, расположенные на волновой поверхности и построенные таким образом, чтобы расстояния от краев каждой зоны до точки М отличались на  $\lambda/2$ , где  $\lambda$  - длина волны света (рис. 5.13).



Колебания, возбуждаемые в точке М двумя соседними зонами, противоположны по фазе, поэтому будут ослаблять друг друга.

Расчёты показывают, что площади зон при небольшом числе  $m$  примерно одинаковы, но с увеличением номера зоны возрастают расстояние  $r$  и угол  $\varphi$  между нормалью к поверхности зоны и направлением к точке М, а следовательно, согласно (5.36) уменьшается амплитуда.

Таким образом, амплитуды колебаний в точке М образуют монотонно убывающую последовательность.

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_m > A_{m+1} > \dots \quad (5.37)$$

Фазы колебаний, возбуждаемых соседними зонами, отличаются на  $\pi$ . Поэтому амплитуда результирующего колебания может быть найдена алгебраически:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \quad (5.38)$$

Это можно записать в виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + A_5 \right) + \dots \quad (5.39)$$

Вследствие монотонного убывания  $A_m$  можно приближенно считать, что

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}. \quad (5.40)$$

При этом условии выражения, заключенные в скобки, будут равны нулю и формула (5.39) упрощается:  $A = A_1/2$ .

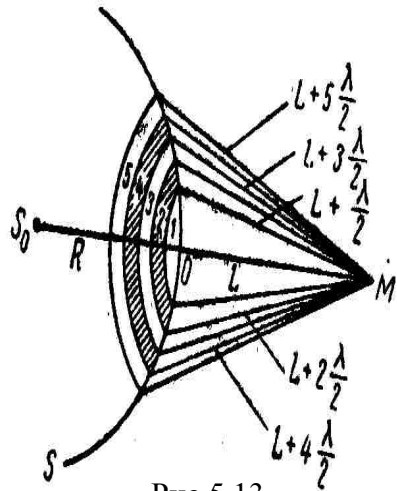


Рис.5.13

Таким образом, амплитуда в точке М равна половине амплитуды центральной зоны Френеля. Размеры центральной зоны невелики. Поэтому свет от источника  $S_0$  распространяется в точку М как бы в пределах очень узкого прямолинейного канала, т.е. практически прямолинейного.

### 5.3.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Свет от точечного источника S, проходя через круглое отверстие в экране  $\mathcal{E}_1$ , создаёт дифракционную картину на экране  $\mathcal{E}_2$ , расположенном параллельно  $\mathcal{E}_1$  (рис. 5.14).

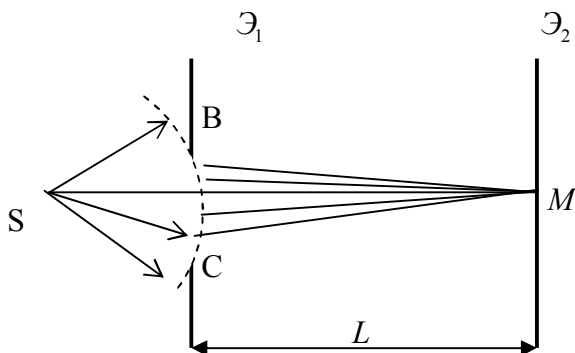


Рис. 5.14

Вопрос о том, что будет наблюдаться в точке М, лежащей против центра отверстия, легко разрешается путём построения в открытой части фронта волны (участок ВС) зон Френеля, соответствующих точке М. Если в отверстии ВС укладывается  $m$  зон Френеля, то формулу (5.39) можно переписать

$$A_{\text{рез.}} = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \dots + \begin{cases} \left( \frac{A_{m-2}}{2} - A_{m-1} + \frac{A_m}{2} \right) + \frac{A_m}{2}, & (m - \text{нечётное}) \\ \left( \frac{A_{m-3}}{2} - A_{m-2} + \frac{A_{m-1}}{2} \right) + \frac{A_{m-1}}{2} - A_m, & (m - \text{чётное}) \end{cases}$$

Выражения, стоящее в скобках, можно положить равными нулю. В результате получится

$$A_{рез.} = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (5.41)$$

где знак (+) берется для нечётных  $m$  и знак (-) – для чётных зон.

Таким образом, экран с отверстием, открывающим нечётное число зон, не только не ослабляет свет в точке  $M$ , а напротив, приводит к увеличению амплитуды почти в 2 раза, а интенсивности почти в 4 раза. Когда отверстие открывает чётное число зон, то амплитуда (интенсивность) будет равна нулю.

Дифракционная картина на круглом отверстии в области точки  $M$  представляет собой чередование светлых и тёмных концентрических колец. В центре будет либо светлое ( $m$ -нечётное), либо тёмное ( $m$ -чётное) пятно. График распределения интенсивности на экране в зависимости от расстояния  $r$  до центра экрана изображен на рис. 5.15.

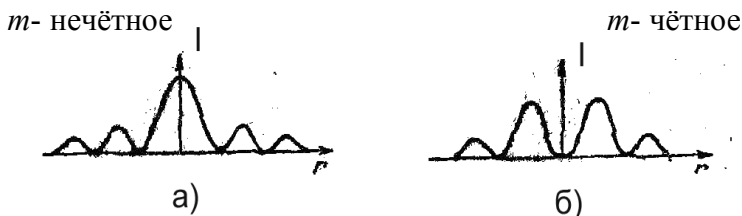


Рис. 5.15

### 5.3.4. Дифракция Френеля на круглом диске

Между точечным источником света  $S$  и точкой наблюдения  $M$  поместим непрозрачный круглый диск  $BC$ , так чтобы он закрывал  $m$  первых зон Френеля (рис.5.16).

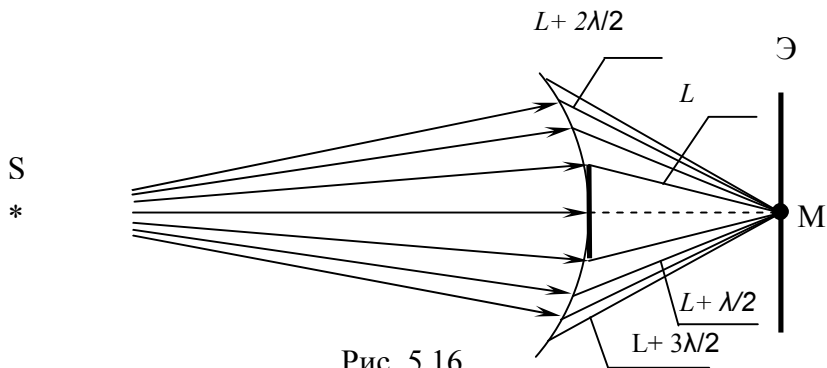


Рис. 5.16

Амплитуда световой волны в точке  $M$  определяется совместным действием всех открытых зон, начиная с первой открытой:

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left( \frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Так как выражения в скобках можно принять равными нулю, то получаем

$$A = \frac{A_{m+1}}{2}, \quad (5.42)$$

то есть в точке  $M$  всегда будет наблюдаться максимум интерференции. При небольшом числе закрытых зон амплитуда  $A_{m+1}$  мало отличается от  $A$ , поэтому интенсивность в точке  $M$  будет такая же как и при отсутствии преграды.

Таким образом, в центре картины при любом  $m$  (как чётном, так и нечётном) наблюдается светлое пятно. Центральный максимум окружён концентрическими с ним тёмными и светлыми кольцами, интенсивность которых убывает с расстоянием от центра (рис. 5.17).

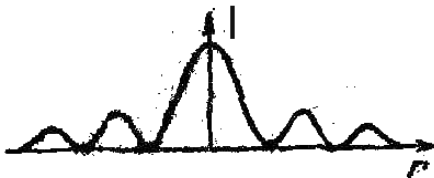


Рис. 5.17

### 5.3.5. Дифракция плоской волны (дифракция Фраунгофера) на узкой щели

Щелью называется прямоугольное отверстие, имеющее незначительную ширину и практически бесконечную длину. Пусть монохроматическая световая волна падает по нормали к плоскости щели шириной  $b$  (рис. 5.18). При этом все точки фронта волны, совмещённого с плоскостью щели, будут колебаться с одинаковой фазой.

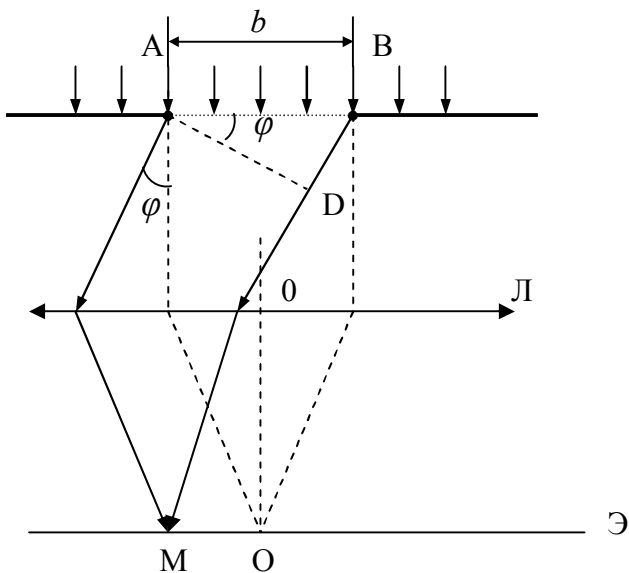


Рис. 5.18

Параллельный пучок света, пройдя через щель, дифрагирует под разными углами в правую и левую сторону от первоначального направления. Линза  $L$  собирает параллельные пучки дифрагированных лучей в соответствующих точках экрана  $\mathcal{E}$ , расположенного в её фокальной плоскости. Недифрагирующие лучи соберутся в центре экрана в точке  $O$  и здесь всегда будет максимум освещённости. Лучи, дифрагирующие влево под углом  $\varphi$ , соберутся в точке  $M$ .

Освещенность этой точки зависит от разности хода между крайними лучами:

$$\Delta = DB = b \sin \varphi \quad (5.43)$$

Найдём условие максимума и минимума дифракции с помощью метода зон Френеля. Разобьём щель АВ на зоны, имеющие вид полос, параллельных ребру щели, так чтобы расстояние от двух соседних полос до точки наблюдения М различалось на  $\lambda/2$ . При интерференции света от каждой пары соседних зон амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как эти зоны вызывают колебания с одинаковыми амплитудами, но противоположными фазами. Результат интерференции определяется тем, сколько зон укладывается на ширине щели. При четном числе зон в точке наблюдения будет минимум дифракции, при нечётном – максимум. Чётному числу зон Френеля на ширине щели соответствует чётное число  $\lambda/2$  на оптической разности хода (рис. 5.19).

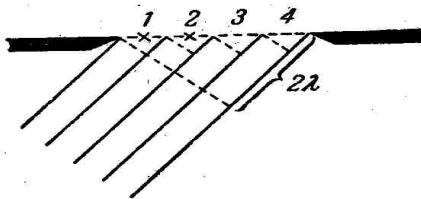


Рис. 5,19

Поэтому условия дифракционного минимума и максимума соответственно будут иметь вид:

$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, - \text{min} \quad (5.44)$$

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots - \text{max} \quad (5.45)$$

Знак (–) в этих выражениях соответствует лучам, распространяющимся под углом  $(-\varphi)$  относительно направления падающих лучей.

На рис. 5.20 представлен график распределения интенсивности света на экране. Основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме. Примерно 5% энергии приходится на первые и 2% – на вторые максимумы.

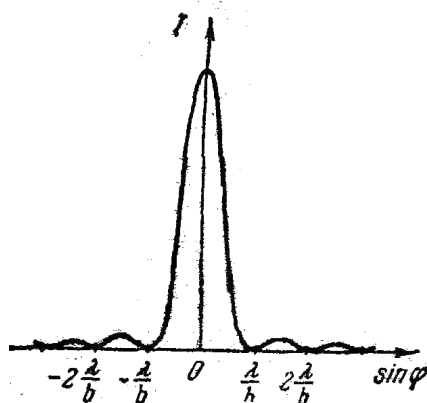


Рис. 5.20

### 5.3.6. Дифракция Фраунгофера на решётке

Дифракционная решётка представляет собой систему, состоящую из большого числа одинаковых по ширине и параллельных друг другу щелей, лежащих в одной плоскости и разделённых непрозрачными промежутками, равными по ширине (рис. 5.21)

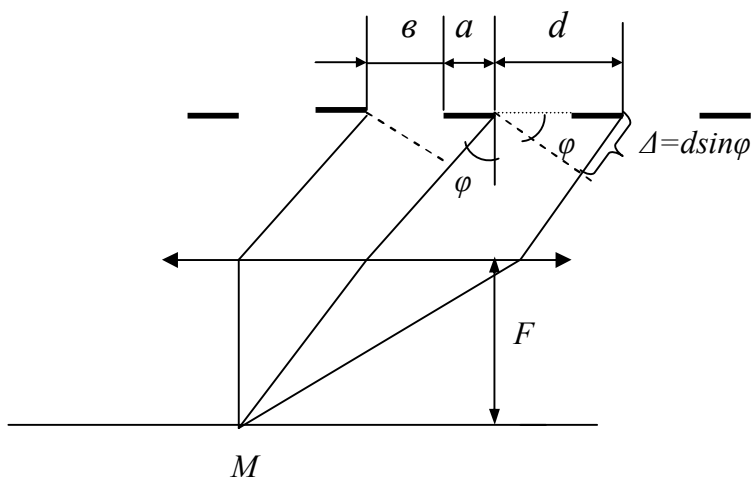


Рис.5.21

Расстояние между соседними щелями называется **периодом дифракционной решётки**:

$$d = a + b, \quad (5.46)$$

где  $b$  - ширина щели,  $a$  - ширина непрозрачного промежутка.

При освещении решётки монохроматическим светом дифракционная картина на экране усложняется (по сравнению с одной щелью) за счет интерференции света от различных щелей.

Пусть монохроматическая волна падает на поверхность решётки по нормали (рис. 5.21). Колебания во всех точках щелей происходят в одной фазе, так как они принадлежат одной волновой поверхности. Найдём амплитуду световой волны в точке  $M$  экрана, в которой собираются лучи от всех щелей, дифрагированные под углом  $\varphi$ .

В одном и том же направлении все щели излучают свет одинаково, то есть все амплитуды  $A_i$  равны. Колебания от сходственных точек соседних щелей в точке  $M$  будут усиливать друг друга, если на их разности хода  $\Delta = d \sin \varphi$  будет укладываться в соответствии (5.11) чётное число полуволн или целое число длин волн.

Таким образом, **положение главных максимумов** определяется формулой

$$d \sin \varphi = \pm \kappa \lambda, \quad (5.47)$$

где  $\kappa = 0, 1, 2, 3, \dots$  определяет порядок максимума.

Амплитуда колебаний в этой точке экрана равна

$$A_{\max} = N \cdot A_{\varphi},$$

где  $A_{\varphi}$  - амплитуда колебания, посылаемого одной щелью под углом  $\varphi$ .

Для направлений, удовлетворяющих условию

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5.48)$$

которое является условием минимума дифракции для одной



щели, все  $A_i$  равны нулю. Поэтому амплитуда результирующего колебания в соответствующей точке экрана также равна нулю. Таким образом, условие (5.48) минимума для одной щели является также **условием минимума дифракции** для решётки.

Кроме главных минимумов, определяемых условием (5.48), в промежутках между соседними главными максимумами имеется по  $(N-1)$  - му добавочному минимуму. Эти минимумы возникают в тех направлениях, для которых колебания от отдельных щелей взаимно погашают друг друга. Направление **добавочных минимумов** определяются условием

$$d \sin \varphi = \pm n \frac{\lambda}{N}, \quad (5.49)$$

где  $n$  принимает все целочисленные значения ( $n = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots$ ) кроме  $0, N, 2N, \dots$

Между дополнительными минимумами располагаются слабые вторичные максимумы. Число таких максимумов, находящихся в промежутке между соседними главными максимумами, равно  $(N-2)$ .

Дифракционная картина, полученная от решётки с  $N = 4$  и  $d/b = 3$ , изображена на рис. 5.22.

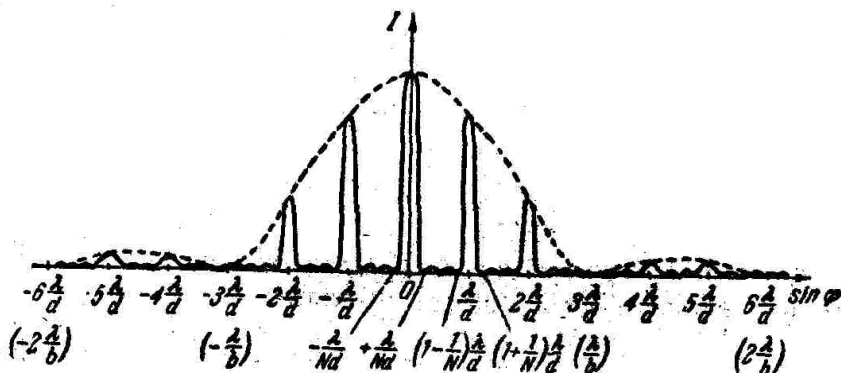


Рис. 5.22

При пропускании через решётку белого света все максимумы, кроме центрального разложатся в спектр, фиолетовый конец которого расположен к центру дифракционной картины, красный – наружу. Дифракционная решётка является спектральным прибором, предназначенным для анализа спектрального состава исследуемого излучения. Качество спектрального прибора характеризуется дисперсией и разрешающей силой.

Дисперсия характеризует ширину спектра, получаемого дифракционной решёткой. Различают угловую и линейную дисперсию. Угловая дисперсия определяет угловое расстояние  $d\varphi$  между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $d\lambda$  :

$$D_{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\kappa}{d}, \quad (5.50)$$

Линейная дисперсия определяет линейно расстояние в фокальной плоскости между этими линиями

$$D = \frac{dl}{d\lambda} = F \frac{\kappa}{d}, \quad (5.51)$$

где  $F$  – фокусное расстояние линзы,  $d$  – период дифракционной решётки,  $\kappa$  – порядок максимума.

Из представленного выражения следует, что дисперсия обратно пропорциональна периоду решётки и прямо пропорциональна порядку спектра.

Разрешающая сила характеризует свойства дифракционной решётки разделять излучения близкие по длине волны и определяется выражением

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \kappa N, \quad (5.52)$$

где  $d\lambda$  - минимальное различие в длине волны, которое может быть обнаружено,  $N$  – число щелей дифракционной решётки.

Таким образом, разрешающая сила дифракционной решётки пропорциональна порядку спектра и числу щелей.

### 5.3.7. Дифракция на пространственной (объёмной) решётке

В качестве пространственных решёток могут быть использованы кристаллы, в которых атомы располагаются в правильном порядке на определённом расстоянии ( $\sim 10^{-10}$  м) друг от друга по трём координатным осям. При прохождении электромагнитных волн через кристалл, атомы, расположенные в узлах кристаллической решётки, становятся источниками вторичных волн, интерференция которых и приводит к возникновению дифракционной картины.

Для получения дифракционной картины необходимо, чтобы период структуры  $d$  был больше длины волны  $\lambda$ . Видимый свет этому условию не удовлетворяет. Для дифракции на пространственной решётке нужны рентгеновские лучи.

Проведем через узлы кристаллической решётки атомные плоскости. Пучок параллельных рентгеновских лучей падает на кристалл под углом скольжения  $\Theta$  (рис. 5.23) и отражается под таким же углом.

Для того чтобы лучи, отраженные от соседних плоскостей усиливали друг друга, разность хода должна быть кратна целому числу длин волн, т.е.  $k\lambda$ . Следовательно максимум интенсивности дифрагированных лучей наблюдается под углами  $\Theta$ , которые удовлетворяют условию:

$$2d \sin \Theta = k\lambda . \quad (5.53)$$

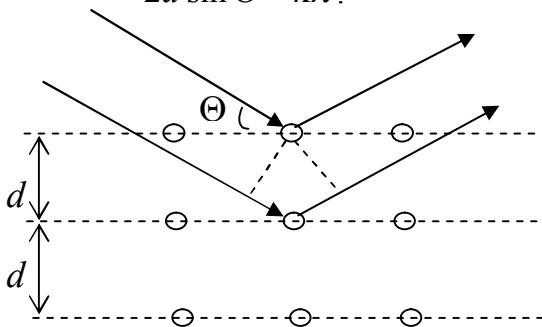


Рис.5.23

Формула (5.53) была получена русским учёным Г.В. Вульфом и английским учёным У.Л. Брэггом и называется **формулой Вульфа–Брэгга**.

Дифракция рентгеновских лучей от кристаллов используется для исследования спектрального состава рентгеновского излучения (рентгеновская спектроскопия) и для изучения структуры кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

## 5.4. Поляризация света

### 5.4.1. Естественный свет и различные типы поляризованного света

Свет – это поперечные электромагнитные волны, в которых колебания векторов напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей происходят перпендикулярно направлению распространения волны. Вместе с тем световые волны не обнаруживают ассиметрии относительно направления распространения, так как они слагаются из множества цугов волн, испускаемых отдельными атомами светящегося тела. Плоскость колебаний светового вектора для каждого цуга ориентирована случайным образом. Поэтому в результирующей волне колебания  $\vec{E}$  различных направлений представлены с равной вероятностью, такой свет называется **естественным** (рис. 5.24).

Свет, в котором колебания каким-либо образом упорядочены, называется **поляризованным**.

Если колебания светового вектора происходят только в одной плоскости, свет называется **плоско - поляризованным**. Плоскость в которой колеблется световой вектор  $\vec{E}$  называется плоскостью

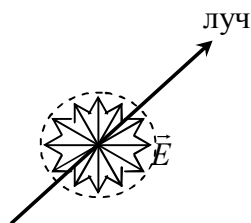


Рис. 5.24

колебаний, а перпендикулярная к ней плоскость, в которой колеблется вектор  $\vec{H}$ , называется **плоскостью поляризации**.

Свет, в котором колебания одного направления преобладают над колебаниями других направлений, называется **частично - поляризованным**. Такой свет можно рассматривать как смесь естественного и плоскополяризованного. Если пропустить частично поляризованный свет через поляризатор, то при вращении прибора вокруг направления луча, интенсивность прошедшего света будет изменяться от  $I_{\max}$  до  $I_{\min}$ , причём переход от одного из этих значений к другому будет совершаться при повороте на угол  $\varphi = \pi / 2$ . За один полный оборот два раза будет достигаться максимальное и два раза минимальное значение интенсивности.

**Степенью поляризации** называют выражение

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (5.54)$$

Для плоскополяризованного света  $I_{\min}=0$  и  $P=1$ , для естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ .

Плоскополяризованный свет можно получить из естественного с помощью прибора, называемого **поляризатором**. Он пропускает колебания, параллельные плоскости поляризатора, и полностью задерживает колебания, перпендикулярные этой плоскости.

Пусть на поляризатор падает плоскополяризованный свет амплитуды  $A_0$  и интенсивности  $J_0$  (рис.5.25). Сквозь прибор пройдет составляющая колебания с амплитудой

$$A_{II} = A_0 \cos \varphi, \quad (5.55)$$

где  $\varphi$  - угол между плоскостью колебаний и плоскостью поляризатора.

Следовательно интенсивность света  $J$ , вышедшего из анализатора, пропорциональна квадрату амплитуды  $A_{II}$  и определяется выражением

$$J = J_0 \cos^2 \varphi, \quad (5.56)$$

которое называется **законом Малюса**.

Если на поляризатор падает естественный свет, то все значения  $\varphi$  являются равновероятными. Поэтому доля света, проходящего через поляризатор, будет равна среднему значению  $\cos^2 \varphi$ , т. е. равна 1/2.

$$J_0 = \frac{1}{2} J_{ест} .$$

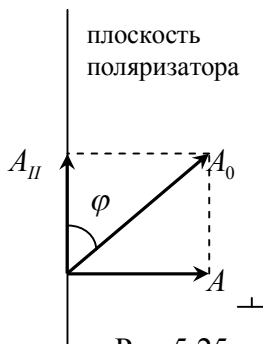


Рис.5.25

#### 5.4.2. Поляризация при отражении и преломлении

Если угол  $\alpha$  падения света на границу раздела двух диэлектриков, не равен нулю, то отраженный и преломленный лучи оказываются частично поляризованными. В отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения, а в преломленном луче – колебания, параллельные плоскости падения (рис.5.26). Степень поляризации зависит от угла падения  $i$ . При угле падения, удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} i_B = n_{12}, \quad (5.56)$$

где  $n_{12}$  - показатель преломления второй среды относительно первой, отраженный луч полностью поляризован в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (рис. 5.27).

Степень поляризации преломленного луча при  $i = i_B$  достигает наибольшего значения, а угол между отраженным и преломленным лучами становится равным  $90^\circ$ . Соотношение (5.56) носит название **закона Брюстера**.

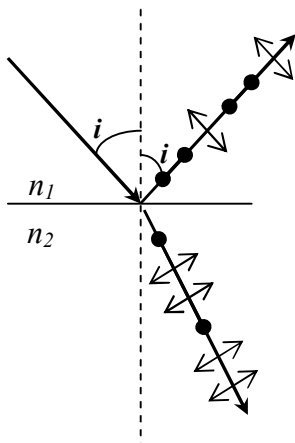


Рис.5.26

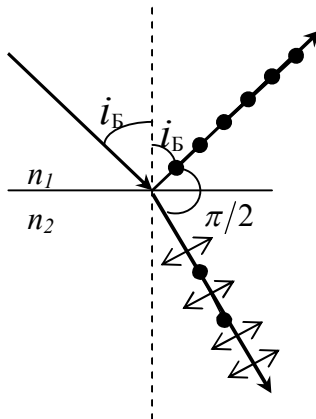


Рис.5.27

Если преломленный луч пропустить через систему, состоящую из  $8 \div 10$ , наложенных друг на друга, пластинок, называемых стопой Столетова, подбирая показатели преломления пластин таким образом, чтобы каждый раз выполнялся закон Брюстера, то вышедший из такой системы свет будет практически полностью поляризованным.

### 5.4.3. Поляризация при двойном лучепреломлении

При прохождении света через прозрачные анизотропные кристаллические диэлектрики с некубической решеткой наблюдается явление двойного лучепреломления, которое заключается в том, что световой луч разделяется на два: **обыкновенный**  $o$  и **необыкновенный**  $e$  (рис. 5.28).

Обыкновенный луч удовлетворяет обычному закону преломления и лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью. Для необыкновенного луча отношение  $\sin i / \sin \beta$  не остается постоянным при изменении угла падения  $i$ , и луч не лежит в одной плоскости с падающим лучом и нормалью к преломляющей поверхности.

**Анизотропными** называются кристаллы, у которых физические свойства (такие, например, как скорость света, показатель преломления и т.д.) различны в различных направлениях. Анизотропные кристаллы делятся на **одноосные** и **двуосные**.

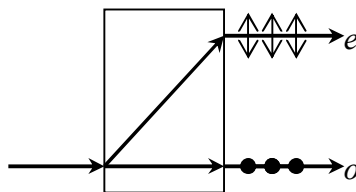


Рис.5.28

У одноосных кристаллов имеется направление, вдоль которого обыкновенный и необыкновенный лучи распространяются, не разделяясь и с одинаковой скоростью. Это направление называется **оптической осью кристалла**.

Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется **главным сечением** кристалла. Обычно главное сечение проводят через оптическую ось и световой луч. К одноосным кристаллам относятся исландский шпат, турмалин, кварц. Обыкновенный и необыкновенный лучи в одноосных кристаллах полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях (рис.5.28). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярно главному сечению. В необыкновенном луче колебания вектора  $\vec{E}$  совершаются в плоскости, совпадающей с главным сечением.

В двуосных кристаллах (слюда, гипс и др.) существует два направления, вдоль которых двойного лучепреломления не наблюдается. Под главным сечением в двуосных кристаллах понимают плоскость, проходящую через обе оптические оси. Оба луча, полученные при двулучепреломлении, являются необыкновенными. Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов, в частности, зависимость от направления обнаруживает диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$ , а следовательно и показатель преломления  $n$ , так как  $n = \sqrt{\epsilon}$ .



В одноосных кристаллах  $\varepsilon$  в направлении оптической оси и в направлениях, перпендикулярных к ней, имеет различные значения:  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\varepsilon_{\perp}$ . В других направлениях  $\varepsilon$  имеет промежуточные значения (рис.29).

Таким образом из анизотропии  $\varepsilon$  вытекает, что электромагнитным волнам с разными направлениями колебаний вектора  $\vec{E}$  соответствуют различные значения показателя преломления  $n$ . Поэтому скорость световых волн в кристалле будет зависеть от направления колебаний светового вектора  $\vec{E}$ , то есть от угла  $\alpha$  между направлением колебания  $\vec{E}$  и оптической осью кристалла.

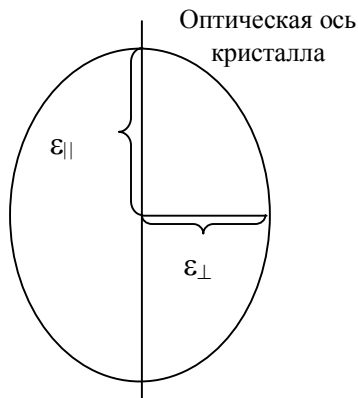


Рис.5.29

Так как в обыкновенном луче колебания светового вектора происходят в направлении, перпендикулярном главному сечению, то при любом направлении распространения обыкновенного луча (1, 2 или 3) (рис.5.30) вектор  $\vec{E}$  образует с оптической осью кристалла прямой угол и скорость световой волны будет одна и та же, равная  $\vartheta_0 = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Изображая скорости обыкновенного луча в виде отрезков, отложенных по разным направлениям, получим **сферическую поверхность**, которая представляет собой **волновую поверхность обыкновенных лучей в кристалле**, если точечный источник в кристалле помещен в точке О.

В необыкновенном луче колебания совершаются в главном сечении. Поэтому для разных лучей направление колебаний вектора  $\vec{E}$  образуют с оптической осью разные углы  $\alpha$  (рис.5.31). Для луча 1  $\alpha = \pi/2$ , поэтому скорость  $\vartheta = \vartheta_0 = c/\sqrt{\varepsilon_{\perp}}$ . Для луча 2 угол  $\alpha = 0$  и скорость  $\vartheta_e = c/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$ .

Для луча 3 скорость имеет промежуточное значение

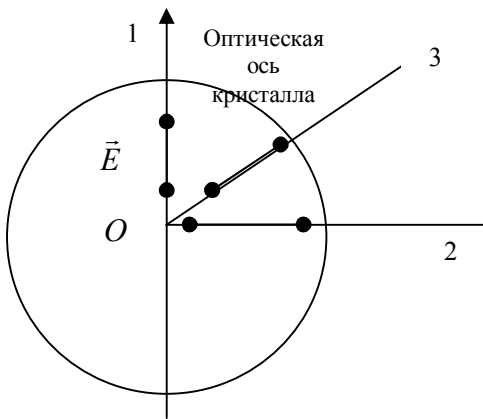


Рис.5.30

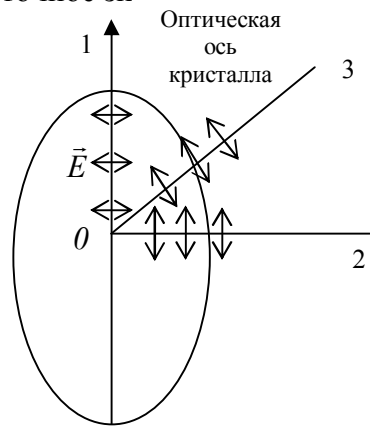


Рис.5.31

Таким образом, **волновая поверхность необыкновенных лучей представляет собой эллипсоид вращения**. В точках пересечения с оптической осью кристалла волновые поверхности обыкновенных и необыкновенных лучей (сфера и эллипсоид) соприкасаются и в зависимости от того, какая из скоростей,  $\mathcal{V}_0$  или  $\mathcal{V}_e$  больше, различают положительные и отрицательные анизотропные кристаллы. Зная вид волновых поверхностей, можно с помощью принципа Гюйгенса определить направление обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле.

Устройство в котором необыкновенный луч можно отделить от обыкновенного, называется призмой Николя. Она состоит из двух прямоугольных призм (рис.5.32) изготовленных из исландского шпата, и склеенных по грани ВС канадским бальзамом.

Углы призм подобраны так, чтобы необыкновенный луч проходил сквозь призму практически не преломляясь, а обыкновенный луч на границе канадского бальзама испытывал полное внутреннее отражение. Это возможно потому, что

показатель преломления исландского шпата для обыкновенного луча больше показателя преломления канадского бальзама.

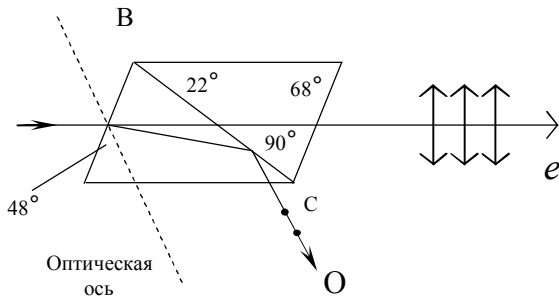
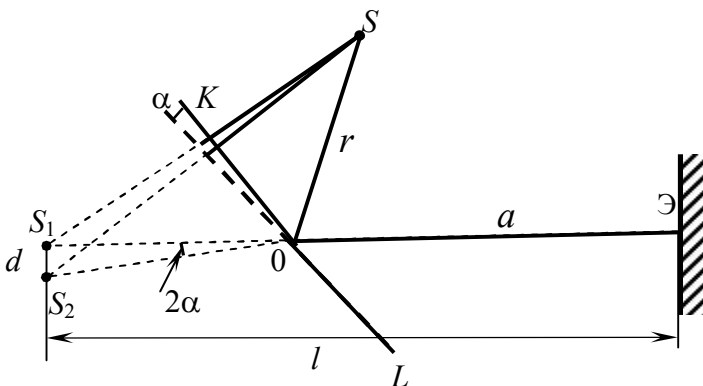


Рис. 5.32

### 5.5. Примеры решения задач по волновой оптике

**Пример 1.** На зеркала Френеля, угол между которыми  $\alpha = 10'$ , падает монохроматический свет от узкой щели  $S$ , находящейся на расстоянии  $r = 0,1$  м от линии их пересечения. Отраженный от зеркал свет дает интерференционную картину на экране  $\mathcal{E}$ , отстоящем на расстоянии  $a = 2,7$  м от линии их пересечения, причем расстояние между интерференционными полосами равно  $x = 2,9 \cdot 10^{-11}$  м. Определить длину волны  $\lambda$  света.



### Решение

После отражения от зеркал  $OK$ ,  $OL$  световые волны распространяются так, будто вышли из двух когерентных источников  $S_1$  и  $S_2$ , являющихся мнимыми изображениями щели  $S$ . Пусть расстояние между источниками  $S_1$  и  $S_2$ , равно  $d$ , а расстояние от них до экрана  $l$ . Величины  $l$ ,  $d$ ,  $x$ ,  $\lambda$  связаны соотношением

$$\lambda = xd/l. \quad (1)$$

Чтобы найти  $d$  и  $l$ , учтем, что точки  $S_1$  и  $S_2$  симметричны точке  $S$  относительно соответствующих зеркал. Поэтому  $S_1O = S_2O = r$  и  $\angle S_1OS_2 = 2\alpha$ . Так как угол  $\alpha$  весьма мал и экран обычно располагается параллельно отрезку  $S_1S_2$ , то можно записать:

$$d = 2\alpha r, \quad l = r + a.$$

Подставив эти значения  $d, l$  в формулу (1), получим

$$\lambda = 2\alpha r x / (r + a).$$

После подстановки числовых значений величин (предварительно выразив угол  $\alpha$  в радианах) найдем

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,6 \text{ мкм}.$$

**Пример 2.** Для уменьшения потерь света при отражении от стекла на поверхность объектива ( $n_2 = 1,7$ ) нанесена тонкая прозрачная пленка ( $n = 1,3$ ). При какой наименьшей толщине ее произойдет максимальное ослабление отраженного света, длина волны которого приходится на среднюю часть видимого спектра ( $\lambda_0 = 0,56 \text{ мкм}$ )? Считать, что лучи падают нормально к поверхности объектива.

### Решение

Свет, падая на объектив, отражается как от передней, так и от задней поверхностей тонкой пленки. Отраженные лучи интерферируют. Условие минимума интенсивности света при

интерференции выражается формулой

$$\Delta = \pm(2k + 1) \frac{\lambda_0}{2}.$$

Оптическая разность хода лучей, отраженных от двух поверхностей тонкой пленки, окруженной одинаковыми средами, определяется формулой

$$\Delta = 2hn \cos \alpha - \lambda_0/2.$$

В данном случае пленка окружена различными средами - воздухом ( $n_1 = 1,0$ ) и стеклом ( $n_2 = 1,7$ ). Из неравенства  $n_1 < n_2$  следует, что оба луча 1 и 2, отражаясь от границы с оптически более плотной средой, «теряют» полуволну. Так как это не влияет на их разность хода, то следует отбросить слагаемое  $\lambda_0/2$ . Кроме того, полагая  $\alpha = 0$ , получим

$$\Delta = 2hn.$$

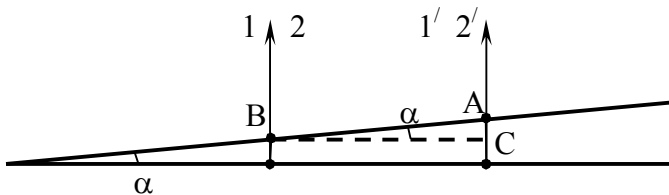
Тогда толщина пленки

$$h = \pm(2k + 1)\lambda_0/4n.$$

Учитывая, что  $h$  - существенно положительная величина и что значению  $h_{min}$  соответствует  $k = 0$ , получим

$$h_{min} = \lambda_0/4n = 0,11 \text{ мкм}.$$

**Пример 3.** Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками заключен очень тонкий воздушный клин. На пластинки нормально падает монохроматический свет ( $\lambda_0 = 0,50 \text{ мкм}$ ). Определить угол  $\alpha$  между пластинками, если в отраженном свете на протяжении  $l = 1,00 \text{ см}$  наблюдается  $N = 20$  интерференционных полос.



## Решение

В данном случае интерферируют лучи 1 и 2, отраженные от двух поверхностей тонкого воздушного клина (см. рис.). Наблюдаемые на поверхности клина интерференционные полосы будут полосами равной толщины, представляя собой геометрическое место точек, соответствующих одинаковой толщине клина.

Пусть точки  $A$ ,  $B$  соответствуют двум соседним интерференционным полосам. Проведя прямую  $BC$ , параллельную нижней пластинке, и учитывая, что искомый угол весьма мал, имеем

$$\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{(h_A - h_B)N}{l}, \quad (1)$$

где  $h_A, h_B$  — толщины воздушного клина в точках  $A, B$ .

Предположим для определенности, что  $AB$  — расстояние между темными интерференционными полосами. Тогда обе величины  $h_A, h_B$  найдем, приравняв правые части формул  $\Delta = \pm(2k+1)\frac{\lambda_0}{2}$  и  $\Delta = 2dn \cos i_2 \pm \frac{\lambda_0}{2}$ . Так как  $i_2 = 0, n = 1$  (воздух) и  $h > 0$ , то

$$h = (k + 1) \lambda_0 / 2. \quad (2)$$

Поскольку величины  $h_A, h_B$  относятся к соседним полосам, то в формуле (2) числа  $k$ , соответствующие величинам  $h_A, h_B$  должны отличаться на единицу. Следовательно,

$$h_A - h_B = \frac{(k_A + 1)\lambda_0}{2} - \frac{(k_B + 1)\lambda_0}{2} = (k_A - k_B) \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2}. \quad (3)$$

Легко, убедиться, что к такому же результату придем, предположив, что  $AB$  есть расстояние между соседними светлыми полосами. Теперь из формулы (1) с учетом результата (3) найдем

$$\alpha = \lambda_0 N / 2l = 5 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'40''.$$

**Пример 4.** Сферическая поверхность плосковыпуклой линзы ( $n_l = 1,52$ ) соприкасается со стеклянной пластинкой

( $n_2 = 1,7$ ). Пространство между линзой, радиус кривизны которой  $R = 1$  м, и пластинкой заполнено жидкостью. Наблюдая кольца Ньютона в отраженном свете ( $\lambda_0 = 0,589$  мкм), измерили радиус  $r_k$  десятого темного кольца. Определить показатель преломления жидкости  $n_{жс}$  в двух случаях:

- 1)  $r_k = 2,05$  мм, 2)  $r_k = 1,9$  мм.

### Решение

Предположим, что показатель преломления жидкости  $n_{жс}$  удовлетворяет одному из двух неравенств:

$$n_{жс} < n_1 < n_2; \quad n_1 < n_2 < n_{жс}. \quad (1)$$

Тогда для темных колец будет верна формула

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

Так как  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n_{жс}}$ , получим  $n_{жс} = kR\lambda_0 / r_k^2$ .

Выполнив вычисления, найдем:

$$1) n_{жс1} = 1,41; \quad 2) n_{жс2} = 1,63.$$

Теперь пусть

$$n_1 < n_{жс} < n_2. \quad (2)$$

В этом случае для темных колец верна формула

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\lambda / 2}.$$

Тогда  $n_{жс} = \frac{(2k-1)R\lambda_0}{2r_k^2}$ . Выполнив вычисления, получим:

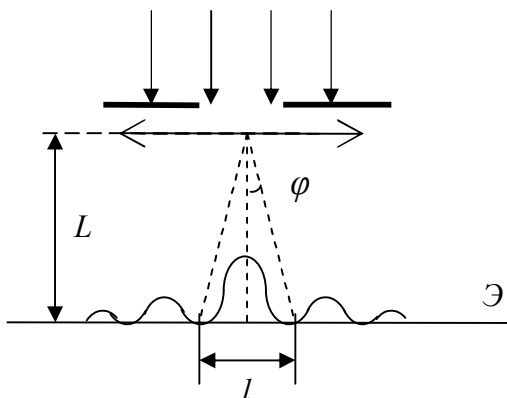
$$1) n_{жс1} = 1,34; \quad 2) n_{жс2} = 1,55.$$

Сравнив результаты вычислений для обоих случаев (очевидно, соответствующих двум разным жидкостям), видим, что в первом случае ( $n_{жс1} = 1,41$ ;  $n_{жс2} = 1,34$ ) значения показателя преломления жидкости удовлетворяют одному из неравенств (1), но не удовлетворяют неравенству (2). Следовательно, для первой жидкости  $n_{жс1} = 1,41$ . Во втором случае ( $n_{жс2} = 1,63$ ;  $n_{жс1} = 1,55$ ) выполняется только неравен-

ство (2). Следовательно, для второй жидкости  $n_{ж2} = 1,55$ .

**Пример 5.** На щель шириной  $a = 0,1 \text{ мм}$  падает нормально монохроматический свет с длиной волны  $\lambda = 500 \text{ нм}$ . Дифракционная картина проецируется на экран, параллельный плоскости щели, с помощью линзы, расположенной вблизи щели. Определить расстояние  $L$  от экрана Э до линзы, если расстояние  $l$  между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального максимума, равно  $1 \text{ см}$ .

### Решение



Условие дифракционных минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (1)$$

где по условию задачи,  $m = 1$ .

Из рисунка следует, что  $l = 2L \operatorname{tg} \varphi$ , но так как  $l/2 \ll L$ , то  $\operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi$ , откуда  $\sin \varphi = l/2L$ .

Подставив эти значения в формулу (1), получим искомое расстояние от экрана до линзы:

$$L = \frac{al}{2\lambda}.$$

Вычисляя, получим  $L = 1 \text{ м}$ .



**Пример 6.** На дифракционную решетку нормально падает параллельный пучок лучей с длиной волны  $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$ . На экране, параллельном дифракционной решетке и отстоящем от нее на расстоянии  $L = 1 \text{ м}$ , получается дифракционная картина. Расстояние между максимумами первого порядка, наблюдаемыми на экране, оказалось равным  $r = 20,2 \text{ см}$ .

Определить:

- а) постоянную дифракционной решетки;
- б) число штрихов на  $1 \text{ см}$ ;
- в) сколько максимумов дает при этом дифракционная решетка?

г) максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

### Решение

а) Постоянная дифракционной решетки  $(a + b)$ , длина волны  $\lambda$  и угол отклонения лучей  $\varphi$ , соответствующий  $k$ -тому дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$(a + b) \sin \varphi = k\lambda, \quad (1)$$

где  $k$  — порядок спектра. В данном случае  $k = 1$ , а

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{l/2}{L}.$$

Указанное приближенное равенство имеет место, поскольку

$\frac{l}{2} \ll L$ . Тогда соотношение (1) принимает вид

$$(a + b) \frac{l}{2L} = \lambda,$$

$$\text{и } d = a + b = \frac{2L\lambda}{l} = 4,95 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

б) Число делений на  $1 \text{ см}$  найдем из формулы

$$N = \frac{1}{a + b} = 2020 \text{ см}^{-1}.$$

в) Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное

значение  $k$ , которое определяется из условия, что максимальный угол отклонения лучей дифракционной решеткой не может превышать  $90^\circ$ . Из формулы (1)

$$k_{\max} = \frac{(a+b) \sin \varphi_{\max}}{\lambda}$$

найдем искомое значение  $k_{\max}$ . Подставляя  $\sin \varphi = 1$ , получим  $k_{\max} = 9,9$ .

Но так как  $k$  обязательно должно быть целым числом, то, следовательно,  $k_{\max} = 9$  ( $k$  не может принять значение, равное 10, так как при этом  $\sin \varphi > 1$ ).

Подсчитываем число максимумов, даваемых дифракционной решеткой: влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться одинаковое число максимумов, равное  $k_{\max}$ , т. е. всего  $2 k_{\max}$ . Учитывая центральный (нулевой) максимум, получим общее число максимумов

$$M = 2 k_{\max} + 1 = 19 \text{ максимумов.}$$

г) Максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму, найдем, подставляя в формулу дифракционной решетки значение  $k = k_{\max}$

$$\sin \varphi = \frac{k_{\max} \lambda}{a+b} = 0,909,$$

откуда находим искомое значение угла  $\varphi = 65^\circ 22'$ .

**Пример 7.** Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 2,20$  мкм, если угол между максимумами первого и второго порядков спектра  $\Delta \varphi = 15^\circ$ .

### Решение

Пусть  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  - углы дифракции, соответствующие максимумам первого ( $k = 1$ ) и второго ( $k = 2$ ) порядков. По условию

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta \varphi. \quad (1)$$

Из формулы дифракционной решетки следует

$$d \sin \varphi_1 = \lambda, \quad (2)$$

$$d \sin \varphi_2 = 2 \lambda. \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2), (3) содержит три неизвестных:  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\lambda$ . Разделив почленно (2), (3), получим  $\sin \varphi_2 = 2 \sin \varphi_1$ , или, учитывая (1),

$$\sin (\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2 \sin \varphi_1.$$

Решив это тригонометрическое уравнение относительно  $\sin \varphi_1$ , найдем

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}}. \quad (4)$$

Теперь из (2) с учетом (4) определим искомую величину:

$$\lambda = \frac{d \sin \Delta\varphi}{\sqrt{5 - 4 \cos \Delta\varphi}} = 0,54 \text{ мкм}.$$

**Пример 8.** При каком минимальном числе штрихов дифракционной решетки с периодом  $d = 2,9 \text{ мкм}$  можно разрешить компоненты дублета желтой линии натрия ( $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$  и  $\lambda_2 = 5896 \text{ \AA}$ )?

#### Решение

Число штрихов  $N$  решетки связано с ее разрешающей силой  $R$  и порядком спектра  $k$  соотношением  $R = kN$ , откуда следует:  $N = R/k$ . Минимальному значению  $N_{\min}$  соответствует минимальное значение  $R_{\min}$  и максимальное число  $k$ , т. е.

$$N_{\min} = R_{\min} / k_{\max}.$$

Минимальная разрешающая сила решетки  $R_{\min}$ , необходимая для разрешения дублета (двух составляющих) желтой линии натрия, выражается через величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  по формуле:

$$R_{\min} = \lambda_1 / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Число  $k_{\max}$  найдем из формулы дифракционной решетки, если положим в ней  $\sin \varphi = 1$  и  $\lambda = \lambda_2$  (последнее соотношение гарантирует, что обе компоненты дублета с порядковым

номером  $k_{\text{макс}}$  будут видны). Учитывая при этом, что  $k$  — целое число, получим

$$k_{\text{макс}} = \frac{d}{\lambda_2} = 4,9 = 4.$$

$$\text{Тогда } N_{\text{мин}} = \frac{\lambda_1}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} = 2,5 \cdot 10^2.$$

**Пример 9.** Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света образует угол  $\varphi = 97^\circ$  с падающим пучком. Определить показатель преломления  $n_1$  жидкости, если отраженный свет максимально поляризован.

#### Решение

Согласно закону Брюстера, пучок света, отраженный от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному показателю преломления

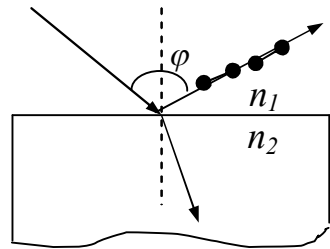
$$\text{tg} \varepsilon_B = n_{21},$$

где  $n_{21}$  - показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления. Следовательно,  $\text{tg} \varepsilon_B = n_2 / n_1$ .

Так как угол падения равен углу отражения, то  $\varepsilon = \varphi/2$  и, следовательно,  $\text{tg}(\varphi/2) = n_2/n_1$ , откуда

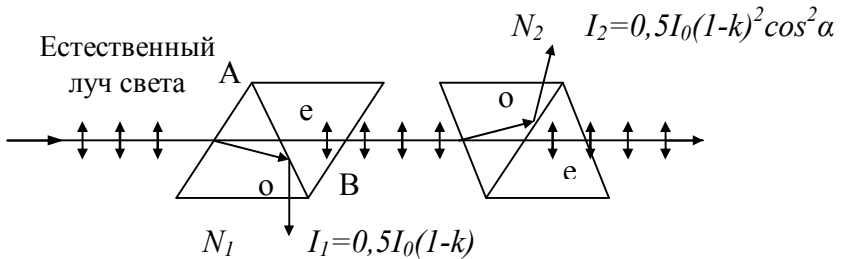
$$n_1 = \frac{n_2}{\text{tg}(\varphi/2)} = 1,33.$$



**Пример 10.** Два николя  $N_1$  и  $N_2$  расположены так, что угол между их плоскостями пропускания составляет  $\alpha = 60^\circ$ . Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность  $I_0$  естественного света: 1) при прохождении через один николю  $N_1$ ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в николе  $k = 0,05$ . Потери на отражение света не учитывать.

### Решение

1. Естественный свет, падая на грань призмы Николя, расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы.



Обыкновенный пучок света ( $o$ ) вследствие полного отражения от границы  $AB$  отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок ( $e$ ) проходит через призму, уменьшая свою интенсивность вследствие поглощения. Таким образом, интенсивность света, прошедшего через первую призму,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1-k).$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света, падающего на первый николю, на интенсивность  $I_1$  поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{2I_0}{I_0(1-k)} = \frac{2}{1-k} = 2,1.$$

Таким образом, интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный пучок света интенсивности  $I_1$  падает на второй николю  $N_2$  и также расщепляется на два пучка различной интенсивности: обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается призмой, поэтому его интенсивность нас не интересует. Интенсивность  $I_2$  необыкновенного пучка, вышедшего из призмы  $N_2$ , определяется законом Малюса (без учета поглощения света во втором николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha,$$

где  $\alpha$  - угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя  $N_2$ .

Учитывая потери интенсивности на поглощение во втором николе, получаем

$$I_2 = I_1 (1-k) \cos^2 \alpha,$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность  $I_0$  естественного света на интенсивность  $I_2$  света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1 (1-k) \cos^2 \alpha} = \frac{2}{(1-k)^2 \cos^2 \alpha} = 8,86.$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

**Пример 11.** На пути частично поляризованного пучка света поместили николю. При повороте николя на угол  $\varphi = 60^\circ$  из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в  $n = 3$  раза. Найти степень поляризации падающего света.

### Решение

Частично поляризованный свет можно рассматривать как смесь плоскополяризованного и естественного света. Николю всегда пропускает половину падающего на него естественного света (превращая его в плоскополяризованный).

Степень пропускания поляризованного света, падающего на николю, зависит, согласно закону Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

от взаимной ориентации главных плоскостей поляризатора и анализатора. Поэтому полная интенсивность света, прошедшего через николю,

$$I = 0,5I_n + I_p \cos^2 \varphi,$$

где  $I_n$ ,  $I_p$  - интенсивности естественной и поляризованной составляющих света, падающего на николю.

Степень поляризации света

$$P = \frac{(I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}})}{(I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}})},$$

где  $I_{\text{макс}} = 0,5I_n + I_p$ ,  $I_{\text{мин}} = 0,5I_n$ .

По условию,  $I_{\text{макс}} = kI$ , или,

$$I_{\text{макс}} = kI_{\text{мин}} + (I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}) \cos^2 \varphi.$$

Обозначим через  $\alpha$  отношение  $I_{\text{макс}}/I_{\text{мин}}$ , тогда

$$P = (1-\alpha)/(1+\alpha);$$

$$1 = k [\alpha + (1 - \alpha) \cos^2 \varphi];$$

$$P = \frac{k-1}{1+k(1-2\cos^2\varphi)} = 0,8.$$

## 6. КВАНТОВАЯ ОПТИКА

Волновые представления о природе света позволили объяснить такие явления, как интерференция, дифракция, поляризация и дисперсия света. Важным подтверждением этих представлений стали электродинамика Максвелла и экспериментальное доказательство электромагнитной природы света. Однако во второй половине XIX века при изучении некоторых явлений было обнаружено, что выводы, получен-

ные на основе волновой теории, противоречат экспериментально установленным законам. Простейшими примерами таких явлений служат тепловое излучение и внешний фотоэффект. Корректное объяснение было получено лишь на основе квантовых представлений о природе света: излучение и поглощение света происходит отдельными порциями энергии – квантами или фотонами. Эти представления привели к понятию корпускулярно-волнового дуализма и развитию квантовой физики. Рассмотрим подробнее явления и процессы, в которых свет проявляет квантовые свойства.

### 6.1. Тепловое излучение. Закон Кирхгофа

Для того чтобы тело излучало электромагнитные волны, необходим источник энергии. Это может быть энергия химических реакций, энергия другого излучения или движущихся частиц, а также внутренняя энергия тела.

Тепловое излучение – это электромагнитное излучение тела, возникающее за счет своей внутренней энергии (все остальные виды излучения называются люминесценцией). Оно зависит от температуры тела и его физических свойств. В отличие от других видов, тепловое излучение является равновесным, т.е. в теплоизолированной системе тело и его излучение находятся в равновесии.

Рассмотрим основные характеристики теплового излучения.

**Испускательная способность** (спектральная плотность энергетической светимости) – поток энергии, испускаемый за единицу времени телом с единицы площади поверхности по всем направлениям в единичном интервале длин волн вблизи данной длины волны  $\lambda$ .

$$r_{\lambda,T} = \frac{dE}{dt dS d\lambda}; \quad [r_{\lambda T}] = \frac{Bm}{M^3}. \quad (6.1)$$

Эта величина характеризует распределение интенсивности по длинам волн, т.е. спектр излучения.



**Энергетическая светимость** - поток энергии, испускаемый телом за единицу времени с единицы площади поверхности по всем направлениям во всем интервале длин волн

$$R = \frac{dE}{dt dS}; \quad [R] = \frac{Bm}{m^2}. \quad (6.2)$$

Величины  $R$  и  $r_{\lambda, T}$  связаны между собой соотношениями

$$R = \int_0^{\infty} r_{\lambda, T} d\lambda, \quad r_{\lambda, T} = \frac{dR}{d\lambda}. \quad (6.3)$$

В соответствии с этим  $R$  и  $r_{\lambda, T}$  называют интегральной и дифференциальной характеристиками теплового излучения.

**Коэффициент поглощения** показывает, какая часть падающего излучения поглощается телом

$$a = \frac{d\Phi_{\text{погл}}}{d\Phi_{\text{пад}}}. \quad (6.4)$$

В общем случае коэффициент поглощения зависит от длины волны излучения и температуры тела и обозначается  $a_{\lambda, T}$ . Тело, у которого эта величина не зависит от длины волны, называется **серым**. Тело, поглощающее все падающее на него излучение ( $a_{\lambda, T} = 1$ ), называется **абсолютно черным телом**. Примером может служить сажа и черный бархат, для которых  $a \rightarrow 1$  в области видимого спектра. Моделью черного тела является небольшое отверстие в замкнутой полости: излучение, попадающее внутрь полости, практически полностью поглощается стенками и не выходит наружу (рис.6.1). Свойство равновесности теплового излучения приводит к очень важному следствию. Рассмотрим замкнутую систему двух тел, находящихся в тепловом равновесии. Пусть одно из тел излучает больше, чем другое:  $R_1 = n R_2$ . Тогда и поглощать оно должно во столько же раз больше:  $a_1 = n a_2$ .

Отсюда следует  $R_1/a_1=R_2/a_2$ . Этот вывод можно распространить на любое число тел и для любой спектральной области

$$\frac{r_{1\lambda,T}}{a_{1\lambda,T}} = \frac{r_{2\lambda,T}}{a_{2\lambda,T}} = \dots = \frac{r_{0\lambda,T}}{a_{0\lambda,T}} = r_{0\lambda,T}^* . \quad (6.5)$$

Здесь и в дальнейшем индексом \* будем обозначать величины, относящиеся к абсолютно черному телу.

Приведенное качественное рассуждение позволяет сформулировать **закон Кирхгофа**: для всех тел, независимо от их материала, отношение испускательной способности к его поглотительной способности есть универсальная функция длины волны и температуры, называемая функцией Кирхгофа и равная испускательной способности абсолютно черного тела.

Этот закон имеет несколько следствий:

- 1) если тело не поглощает ( $a = 0$ ), то оно и не излучает ( $R = 0$ );
- 2) наибольшим излучением обладает абсолютно черное тело;
- 3) зная излучение абсолютно черного тела, можно определить излучение любого тела, в частности, для серых тел  $R = aR^*$ .

Следовательно, исследование теплового излучения сводится к определению характеристик абсолютно черного тела.

## 6.2. Спектр и законы излучения абсолютно чёрного тела

Модель абсолютно чёрного тела позволяет экспериментально изучать распределение энергии в спектре этого излучения. Для этого необходимо стенки полости поддерживать при некоторой постоянной температуре и исследовать излучение через малое отверстие. Разлагая это излучение в спектр и измеряя интенсивность различных участков спектра, можно получить экспериментальные кривые при различных температурах (рис.6.2). Анализ кривых зависимости излучательной способности чёрного тела от температуры,

позволил установить следующие законы теплового излучения.

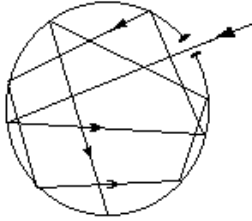


Рис.6.1

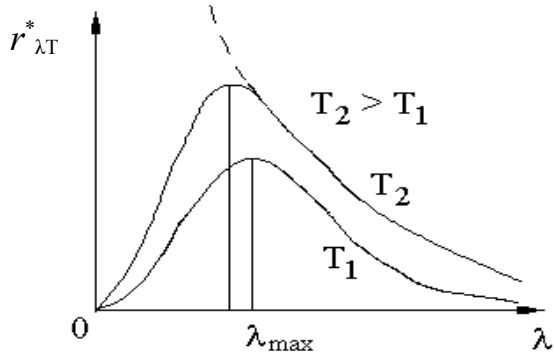


Рис.6.2

**Закон Стефана-Больцмана.** Энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры:

$$R^* = \sigma T^4, \quad (6.6)$$

где  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \text{ К}^4$  – постоянная Стефана-Больцмана.

Этот закон установлен экспериментально Стефаном, считавшим что он справедлив для любых тел, и выведен теоретически Больцманом, доказавшим его применимость только для абсолютно черного тела.

**Закон смещения Вина (1 закон Вина).** Длина волны, на которую приходится максимума испускательной способности абсолютно черного тела, обратно пропорциональна его абсолютной температуре:

$$\lambda_{max} = b / T, \quad (6.7)$$

где  $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$  – постоянная смещения Вина,  $\lambda_{max}$  – длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности (рис.6.2).

**2 закон Вина.** Максимум испускательной способности абсолютно черного тела пропорционален пятой степени его абсолютной температуры:

$$r_{max}^* = C T^5, \quad (6.8)$$

где  $C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \text{ К}^5)$  – постоянная Вина.

Следует отметить, что закон Стефана-Больцмана и законы Вина определяют энергетическую светимость, положение и высоту максимума испускательной способности, но не дают зависимость  $r_{\lambda,T}$ . Попытка определить вид этой функции была предпринята Рэлеем и Джинсом. Они рассматривали излучение, как набор стоячих волн, энергия которых определяется классической статистикой, и в результате получили следующее соотношение

$$r_{\lambda,T} = 8\pi k T \lambda^{-4}, \quad (6.9)$$

называемое **формулой Рэля-Джинса**. Эта функция правильно описывает поведение  $r_{\lambda,T}$  в длинноволновой области спектра, но при  $\lambda \rightarrow 0$  стремится к  $\infty$  (на рис.6.2 это показано пунктиром).

Несовпадение экспериментальных и теоретических результатов получило название «ультрафиолетовой катастрофы», так как правильное, корректное использование классических представлений приводит к абсурду и не позволяет получить выражение для испускательной способности абсолютно чёрного тела.

Правильное выражение для функции Кирхгофа было получено в 1900 г. Планком на основе предположения, что свет излучается отдельными порциями энергии (квантами или фотонами), величина которых пропорциональна частоте излучения:

$$E = h\nu = \hbar\omega, \quad (6.10)$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ ,  $\hbar = h/(2\pi)$ .

Планк получил следующее выражение

$$r_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}, \quad (6.11)$$

которое называется **формулой Планка** для теплового излучения и правильно описывает спектр излучения

абсолютно черного тела во всём интервале длин волн.

Определяя  $R^*$  через интеграл от  $r_{\lambda,T}^*$ , можно получить пропорциональность  $R^*$  четвертой степени температуры, причем рассчитанный коэффициент пропорциональности совпадает с постоянной Стефана-Больцмана. Если найти максимум функции  $r_{\lambda,T}^*$ , приравнять ее производную нулю, то получится соотношение между  $\lambda_{max}$  и  $T$ , совпадающее с законом смещения Вина, а подставив это соотношение в формулу Планка можно получить второй закон Вина.

Таким образом, формула Планка правильно описывает испускательную способность абсолютно черного тела и позволяет получить законы теплового излучения. Зная же характеристики излучения абсолютно черного тела, можно определить излучение любого другого тела.

### 6.3. Фотоэффект

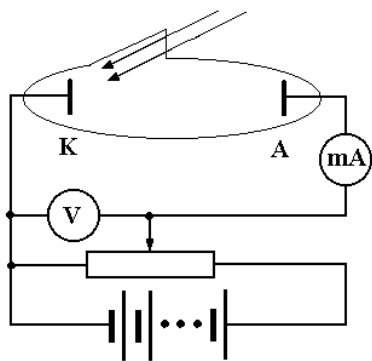
Различают три вида фотоэффекта.

**Внешний фотоэффект** – явление вырывания электронов с поверхности тела под действием света. Наблюдается в металлах.

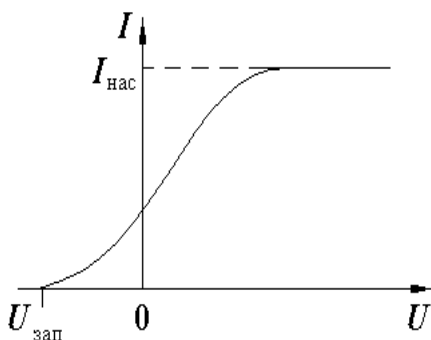
**Внутренний фотоэффект** – под действием света электрон освобождается от связи с атомом и становится свободным. Наблюдается в полупроводниках и диэлектриках, проявляется в увеличении проводимости.

**Вентильный фотоэффект** – образование ЭДС. на границе раздела полупроводников с разными типами проводимости или границе металл-полупроводник под действием света.

Рассмотрим подробнее внешний фотоэффект. Для исследования закономерностей этого явления можно использовать установку, подобную приведённой на рис.6.3а. Она состоит из вакуумированной колбы с кварцевым окошком и двумя электродами, на которые подается напряжение.



а)



б)

Рис. 6.3

На такой установке можно определить зависимость фототока  $I$  от напряжения между электродами  $U$ , т.е. вольт-амперную характеристику (ВАХ), примерный вид которой показан на рис.6.3б. При отсутствии света тока в цепи нет. Под действием излучения из катода выбиваются фотоэлектроны, которые могут достигать анода и в цепи появляется ток. С увеличением прямого напряжения ток увеличивается, т.к. все большая часть фотоэлектронов под действием поля попадает на анод. При достаточно большом поле все электроны, вырванные с катода, достигают анода и дальнейшее увеличение напряжения не приводит к росту тока, т.е. ток достигает насыщения  $I_{нас}$ .

$$I_{нас} = ne, \quad (6.12)$$

где  $n$  - число фотоэлектронов, вылетающих из катода за 1 секунду.

При изменении полярности напряжения его увеличение приводит к уменьшению тока и при некотором значении  $U_{зап}$  (запирающее напряжение) электроны не могут преодолеть потенциальный барьер и фототок прекращается. Очевидно, что величина  $U_{зап}$  определяет максимальную кинетическую

энергию фотоэлектронов

$$eU_{\text{зан}} = \frac{mV_{\text{max}}^2}{2}. \quad (6.13)$$

Систематические исследования фотоэффекта позволили сформулировать основные законы внешнего фотоэффекта (**законы Столетова**).

1. При неизменном спектральном составе падающего света фототок насыщения пропорционален световому потоку

$$I_{\text{нас}} \sim \Phi.$$

2. Максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов не зависит от интенсивности света и прямо пропорциональна частоте излучения

$$\frac{mV_{\text{max}}^2}{2} \sim \nu.$$

3. Для каждого вещества существует минимальная частота  $\nu_{\text{кр}}$ , ниже которой фотоэффект не наблюдается, – **красная граница фотоэффекта**.

В ходе дальнейших исследований было установлено также, что фотоэффект безинерционен.

Попытка объяснения этих законов на основе классических представлений о взаимодействии света с веществом привела к совершенно другим закономерностям. Взаимодействие электромагнитного излучения с веществом можно рассматривать как действие переменного электрического поля на внешние, наиболее слабо связанные с ядром (свободные), электроны. Под действием поля электроны совершают вынужденные колебания и в результате могут приобрести энергию, достаточную для выхода из металла.

Тогда максимальная кинетическая энергия электронов должна определяться амплитудой электрического поля, (интенсивностью излучения), и красной границы фотоэффекта быть не должно. Кроме этого, для «раскачки» электронов периодическим полем необходимо некоторое время, т.е. фотоэффект должен обладать инерцией. Таким образом, с

позиций классической физики законы фотоэффекта должны иметь другой вид.

Правильное объяснение закономерностей фотоэффекта было получено в 1905 г. Эйнштейном на основе предположения, что свет поглощается такими же порциями, как и испускается. При взаимодействии фотона с электроном фотон исчезает, передавая электрону всю свою энергию. Часть этой энергии электрон затрачивает на совершение работы выхода из металла  $A$ , оставшаяся часть идет на кинетическую энергию фотоэлектрона. Таким образом, для этого процесса можно записать закон сохранения энергии

$$h\nu = A + \frac{mV_{\max}^2}{2}. \quad (6.14)$$

Это соотношение называется **формулой Эйнштейна для фотоэффекта**. Из нее сразу следуют экспериментально установленные законы: пропорциональность кинетической энергии частоте и наличие красной границы фотоэффекта ( $h\nu \geq A$ ,  $\nu_{кр} = A/h$ ). Для объяснения первого закона следует учесть, что фототок насыщения пропорционален числу фотоэлектронов, которое, в свою очередь, пропорционально числу фотонов, а это число определяет световой поток, падающий на катод.

Приведенное рассмотрение относится к так называемому однофотонному фотоэффекту: электрон взаимодействует с одним фотоном. С появлением мощных источников света, в частности лазеров, был обнаружен многофотонный фотоэффект, при котором электрон взаимодействует с несколькими ( $N$ ) фотонами и получает от них энергию. Для этого случая уравнение Эйнштейна имеет вид

$$Nh\nu = A + \frac{mV_{\max}^2}{2}. \quad (6.15)$$

Соответственно в  $N$  раз уменьшается частота красной границы фотоэффекта.



#### 6.4. Масса и импульс фотона. Давление света

Согласно гипотезе Эйнштейна свет испускается и поглощается в виде отдельных порций энергии - фотонов, которые можно рассматривать как частицы. Помимо энергии, фотон обладает и другими характеристиками, свойственными частице – массой и импульсом.

Массу фотона можно определить из закона пропорциональности массы и энергии, установленного Эйнштейном

$$m_{\phi} = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \quad (6.16)$$

Зная массу и скорость, определяем импульс:

$$P_{\phi} = m_{\phi}c = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (6.17)$$

Таким образом, все корпускулярные характеристики фотона связаны с волновой характеристикой излучения - его частотой (длиной волны).

Корпускулярные свойства света позволяют достаточно просто объяснить световое давление как результат передачи импульса фотона отражающей или поглощающей поверхности. Пусть на поверхность с коэффициентом отражения  $\rho$  падает нормально монохроматический свет частоты  $\nu$ . Давление равно суммарному импульсу, переданному единице площади поверхности в единицу времени:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta P}{S\Delta t}. \quad (6.18)$$

Если за единицу времени на единицу площади поверхности падает  $N$  фотонов, то из них  $\rho N$  отражается и  $(1-\rho)N$  поглощается. Каждый отраженный фотон передает поверхности импульс  $2P_{\phi}$ , поглощенный -  $P_{\phi}$ . Тогда давление света равно:

$$P = 2P_{\phi}\rho N + P_{\phi}(1-\rho)N = (1+\rho)\frac{h\nu}{c}N.$$

Учитывая, что  $E = N h \nu$  – есть энергия всех фотонов, а  $\omega = E/c$  – объемная плотность энергии излучения, получим

$$P = \frac{E}{c}(1 + \rho) = \omega(1 + \rho). \quad (6.19)$$

Эта формула совпадает с выражением, полученным на основе электромагнитной теории света, т.е. световое давление одинаково успешно объясняется и волновой и квантовой теорией.

### 6.5. Эффект Комптона

В 1923 г. американский физик Комптон исследовал рассеяние монохроматического рентгеновского излучения легкими веществами (графит, парафин, бор и др.). Было установлено, что *в рассеянном излучении, помимо исходного, присутствует излучение с большей длиной волны, причем длина волны растет с увеличением угла рассеяния*. Это противоречит волновым представлениям о природе света: с позиций электромагнитной теории - при рассеянии на веществе длина волны не должна изменяться.

Эффект Комптона объясняется на основе квантовых представлений о взаимодействии фотонов с электронами. Один из видов такого взаимодействия рассматривался при обсуждении явления фотоэффекта: фотон исчезает, отдавая свою энергию электрону. При этом следует учитывать, что электрон в металле является связанным с другими электронами и ионами кристаллической решетки.

При взаимодействии фотона со свободным электроном может произойти только процесс рассеяния, в результате которого появится новый фотон, летящий под углом  $\theta$  к направлению движения первоначального фотона (рис.6.4) Законы сохранения следует записывать с учетом релятивистских эффектов в виде:

$$\vec{P}_\phi = \vec{P}'_\phi + m \vec{V}; \quad m_0 c^2 + h \nu = m c^2 + h \nu'. \quad (6.20)$$

Здесь  $P_\phi$ ,  $\nu$  и  $P'_\phi$ ,  $\nu'$  – импульс и частота фотона до взаимодействия и после.

Решение этих уравнений приводит к следующему выражению, определяющему изменение длины волны излучения при рассеянии на свободных электронах:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = (h/m_0c)(1 - \cos\theta) = \lambda_K(1 - \cos\theta), \quad (6.21)$$

где  $\lambda_K = h / m_0 c = 2,43 \text{ нм}$  – комптоновская длина волны,  $\theta$  - угол рассеяния фотонов.

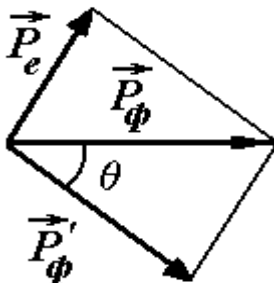


Рис.6.4

Полученная формула соответствует экспериментально установленной зависимости длины волны рассеянного излучения от угла рассеяния. Рассеяние света на тяжёлых веществах происходит без изменения длины волны. Это объясняется взаимодействием фотонов с сильно связанными электронами: фотон упруго взаимодействует со всем атомом, масса которого гораздо больше, поэтому практически не передает ему энергии.

## 6.6. Примеры решения задач по квантовой оптике

**Пример 1.** Железный шар диаметром  $d = 0,1 \text{ м}$ , нагретый до температуры  $T_1=1500\text{К}$ , остывает на открытом воздухе. Через какое время его температура понизится до  $T_2 = 1000 \text{ К}$ ? При расчете принять, что шар излучает как серое тело

с коэффициентом излучения  $\varepsilon = 0,5$ . Теплопроводностью воздуха пренебречь.

### Решение

Количество теплоты, теряемое шаром при понижении температуры на малую величину  $dT$ , равно

$$dQ = c m dT, \quad (1)$$

где  $c$  – удельная теплопроводность железа;  $m$  – масса шара.

Учитывая, что

$$m = \rho V = 4/3 \pi \rho r^3, \quad (2)$$

где  $r$  – радиус шара;  $\rho$  – плотность железа, получаем

$$dQ = 4/3 \pi \rho r^3 c dT, \quad (3)$$

С другой стороны, количество теплоты, теряемое шаром вследствие излучения, можно найти, используя закон Стефана-Больцмана:

$$dQ = \varepsilon \sigma T^4 S dt = \varepsilon \sigma T^4 4 \pi r^2 dt, \quad (4)$$

где  $dt$  – время излучения, соответствующее понижению температуры на  $dT$ . Приравнявая правые части равенств (3) и (4), получаем

$$dt = c \rho r T^{-4} dT / 3 \varepsilon \sigma. \quad (5)$$

Проинтегрировав это выражение, найдем

$$t = c \rho r (1/T_2^3 - 1/T_1^3) / 3 \varepsilon \sigma. \quad (6)$$

После подстановки числовых значений получим  $t = 500$  с.

**Пример 2.** Вследствие изменения температуры черного тела максимум спектральной плотности энергетической светимости сместился с длины волны  $\lambda_1 = 2,4$  мкм на  $\lambda_2 = 0,8$  мкм. Как и во сколько раз изменилась энергетическая светимость тела и максимальная спектральная плотность энергетической светимости?

### Решение

Зная длины волн, на которые приходятся максимумы лучеиспускательной способности тела, и, используя закон смещения Вина, находим начальную и конечную температуры

тела

$$T_1 = b / \lambda_1, T_2 = b / \lambda_2.$$

Энергетическая светимость черного тела определяется согласно закону Стефана-Больцмана

$$R^* = \sigma T^4,$$

следовательно,  $R_1^* / R_2^* = (T_2 / T_1)^4 = (\lambda_1 / \lambda_2)^4$ .

Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости определяется по второму закону Вина

$$r_{\lambda T_{max}}^* = c T^5.$$

Тогда

$$r_{2max}^* / r_{1max}^* = (T_2 / T_1)^5 = (\lambda_1 / \lambda_2)^5.$$

Подставляя числовые значения, получаем

$$R_2^* / R_1^* = 81;$$

$$r_{2max}^* / r_{1max}^* = 243.$$

**Пример 3.** Красная граница фотоэффекта у рубидия равна  $\lambda_0 = 0,8 \text{ мкм}$ . Определить максимальную скорость фотоэлектронов при облучении рубидия монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 0,4 \text{ мкм}$ . Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратился ток?

### Решение

Энергия фотона вычисляется по формуле  $\varepsilon = hc / \lambda$  и составляет для  $\lambda = 0,4 \text{ мкм}$   $\varepsilon = 3,1 \text{ эВ}$ . Эта величина значительно меньше энергии покоя электрона, поэтому максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона может быть выражена классической формулой  $T_{max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2$ . Выразив работу выхода через красную границу фотоэффекта, на основании уравнения Эйнштейна получим

$$T_{max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2 = h c / \lambda - h c / \lambda_0.$$

Откуда

$$V_{max} = (2 h c (\lambda_0 - \lambda) / (m \lambda_0 \lambda))^{1/2}.$$

Подставив числовые значения, найдем  $V_{max} = 0,74 \cdot 10^8$  м/с.

При  $U < 0$  внешнее поле между катодом и анодом фотоэлемента тормозит движение электронов. Задерживающая разность потенциалов  $U_3$ , при которой сила тока обращается в нуль, определится из уравнения  $e U_3 = m V_{max}^2 / 2$ .

Следовательно,  $U_3 = hc(1/\lambda - 1/\lambda_0) / e = 1,58$  В.

**Пример 4.** Уединенный медный шарик облучают ультрафиолетовыми излучением с длиной волны  $\lambda = 165$  нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик?

#### Решение

Вследствие вылета электронов под действием излучения шарик заряжается положительно. Электрическое поле шарика тормозит вылетевшие электроны, однако, если их кинетическая энергия достаточно велика для преодоления электростатического притяжения, то они будут уходить практически в бесконечность. Максимальный потенциал, до которого зарядится шарик, определится из выражения

$$e \varphi_{max} = m V_{max}^2 / 2.$$

Из уравнения Эйнштейна

$$m V_{max}^2 / 2 = h\nu - A = hc / \lambda - A,$$

тогда

$$\varphi_{max} = (hc / \lambda - A) / e = 3 \text{ эВ}.$$

**Пример 5.** Фотон испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне. Найти импульс налетающего фотона, если энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии электрона отдачи при угле  $\varphi = \pi/2$  между направлениями их разлета.

#### Решение

Кинетическая энергия  $T$  электрона отдачи на основании закона сохранения энергии равна разности между энергией  $\mathcal{E}$  падающего фотона и энергией  $\mathcal{E}'$  рассеянного фотона

$$T = \varepsilon - \varepsilon'$$

По условию задачи  $T = \varepsilon'$ , значит,  $\varepsilon = 2\varepsilon'$ , или

$$hc/\lambda = 2hc/\lambda',$$

откуда  $\lambda/\lambda' = 0,5$ , а с учетом формулы  $P = h/\lambda$ ,  $P'/P = 0,5$ . Воспользуемся законом сохранения импульса, в соответствии с которым

$$\vec{P} = \vec{P}' + m\vec{v}.$$

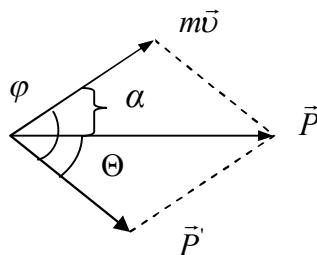
Построим векторную диаграмму.

Угол  $\varphi = 90^\circ$  между направлениями разлета рассеянного фотона и электрона отдачи складывается из углов  $\Theta$  и  $\alpha$ . Учитывая, что

$\sin\alpha = P'/P = 0,5$ , а  $\alpha = 30^\circ$ , получим  $\Theta = \varphi - \alpha = 60^\circ$ . На основании формулы Комптона

$\lambda = 0,5\lambda_k$ , следовательно получаем

$$P = h/0,5\lambda_k = 2m_0c = 1,02 \text{ МэВ}/c.$$



**Пример 6.** Определить импульс электрона отдачи при эффекте Комптона, если фотон с энергией, равной энергии покоя электрона, был рассеян под углом  $\Theta = 180^\circ$ .

### Решение

Используя формулы для энергии и импульса фотона, определяем длину волны и импульс падающего фотона. Так как по условию

$$\varepsilon = hc/\lambda = m_0c^2,$$

то

$$h/m_0c^2, P = h/\lambda = m_0c.$$

В соответствии с формулой Комптона для данного случая

$$\lambda' - \lambda = \lambda_k(1 - \cos 180^\circ) = 2\lambda_k,$$

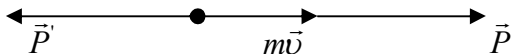
откуда длина волны рассеянного фотона равна

$$\lambda' = 2\lambda_k + \lambda = 2h/(m_0c) + h/(m_0c) = 3h/(m_0c).$$

Величина его импульса

$$P' = h / \lambda' = m_0 c / 3.$$

Для нахождения импульса электрона отдачи построим векторную диаграмму импульсов.



По закону сохранения импульса  $\vec{P} = \vec{P}' + m\vec{v}$ , или  $P = -P' + mv$

Из полученного уравнения найдем

$$mv = P + P' = 4/3 m_0 c.$$

Подставив числовые значения, получим

$$mv = 3,64 \times 10^{-22} \text{ кг м/с.}$$

**Пример 7.** Пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 663 \text{ нм}$  падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток излучения  $\Phi_e = 0,6 \text{ Вт}$ . Определить:

- 1) силу давления  $F_e$ , испытываемую этой поверхностью;
- 2) число фотонов ежесекундно падающих на поверхность.

### Решение

1) Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления  $p$  на площадь  $S$  поверхности:

$$F = p \cdot S. \quad (1)$$

Световое давление может быть найдено по формуле

$$p = E_0(\rho + 1) / c, \quad (2)$$

где,  $E_0$  – энергетическая освещённость;  $c$  – скорость света в вакууме;  $\rho$  – коэффициент отражения.

Подставляя правую часть уравнения (2) в формулу (1), получаем

$$F = E_0 S(\rho + 1) / c. \quad (3)$$



Так как  $E_0 S$  представляет собой поток излучения  $\Phi_e$ , то

$$F = \Phi_e (\rho + 1) / c. \quad (4)$$

Проведём вычисления, учитывая, что для зеркальной поверхности  $\rho=1$  :

$$F = \frac{0,6}{3 \cdot 10^8} (1+1) = 4 \text{ нН}.$$

2) Произведение энергии  $\varepsilon$  одного фотона на число фотонов  $n_I$ , ежесекундно падающих на поверхность, равно мощности излучения, т.е. потоку излучения:  $\Phi_e = \varepsilon n_I$ , а так как  $\varepsilon = hc/\lambda$ , то

$$\Phi_e = hc n_I / \lambda,$$

откуда

$$n_I = \Phi_e \lambda / hc. \quad (5)$$

Произведя вычисления, получим

$$n_I = 2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

## 7. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ АТОМА

### 7.1. Корпускулярно-волновой дуализм. Формула де Бройля

В явлениях интерференции, дифракции, поляризации, дисперсии и других, свет проявляет волновые свойства, т.е. это электромагнитная волна с  $\lambda = c/\nu$  и  $\omega = 2\pi\nu$ .

В явлениях теплового излучения, фотоэффекте, эффекте Комптона свет представляет поток фотонов с  $E = h\nu$  и  $p = E/c = h/\lambda$ .

Таким образом, свет может проявлять как волновые, так и корпускулярные свойства, т.е. имеет двойственную природу (корпускулярно - волновой дуализм). В 1924 г. Французский физик Луи де Бройль предположил, что

двойственная природа свойственна любым движущимся частицам, а не только фотонам. Частице с энергией  $E$  и импульсом  $p$  соответствует волна с длиной волны и частотой, определяемых выражениями

$$\lambda = h/p; \quad \nu = E/h. \quad (7.1)$$

Эти формулы называются **соотношениями де Бройля**. Волны де Бройля имеют вероятностное, статистическое толкование и не имеют аналогов в классической физике. В 1927 г. гипотеза получила экспериментальное подтверждение – К. Дэвидсон и Л. Джермер наблюдали дифракцию электронов на пластинах  $Ni$ . В дальнейшем волновые свойства были обнаружены у протонов, нейтронов и других микрочастиц. Опытами Фабриканта и других было показано, что волновые свойства характерны не только для ансамбля частиц, но и для отдельной частицы.

Таким образом, корпускулярно-волновой дуализм микрочастиц - объективная реальность.

## 7.2. Соотношение неопределенностей

Состояние классической частицы полностью определяется ее координатами и импульсом. Зная начальное положение частицы и действующие силы, можно записать и решить уравнение движения (2-ой закон Ньютона) и тем самым определить координаты и импульс частицы для любого момента времени.

Для микрочастицы, вследствие наличия у нее волновых свойств, ситуация другая.

Пусть частица движется вдоль оси  $X$ . Если точно определена координата частицы, то ничего нельзя сказать о ее импульсе, т.к. в соответствии с формулой де Бройля он определяет длину соответствующей волны, но понятие длины волны в данной точке не имеет смысла. Если же точно задан импульс частицы, то получаем монохроматическую волну,

имеющую бесконечную протяженность, т.е. не определена координата частицы. Таким образом, координата и импульс частицы не могут быть одновременно определены точно, всегда будет погрешность. Можно показать, что это справедливо не только для координат и соответствующего импульса, но и для энергии и времени. Степень точности задается соотношениями неопределенности (соотношениями Гейзенберга):

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p_x &\geq h, \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq h, \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq h, \\ \Delta t \cdot \Delta E &\geq h.\end{aligned}\tag{7.2}$$

В силу малой величины  $h$  эти соотношения существенны только в микромире и не проявляются в опытах с макроскопическими телами.

Из этих соотношений следует несколько выводов:

- 1) микрочастица не может находиться в покое;
- 2) нельзя разделять полную энергию микрочастицы на кинетическую и потенциальную;
- 3) принципиально невозможно точно определить одновременно координату и импульс частицы.

### 7.3. Уравнение Шредингера

Наличие волновых свойств у микрочастиц не позволяет описывать их с помощью классического уравнения динамики, дающего возможность по заданным силам и начальным условиям найти для любого момента времени координаты частицы и её скорость (импульс). Возникла необходимость получения основного уравнения квантовой механики, которое позволило бы решить аналогичные задачи, но с учётом волновых свойств частиц. Такое уравнение было получено в 1929г. Шредингером. Оно как и уравнения Ньютона, не выводится, а постулируется как основной закон

природы. Единственным доказательством его справедливости может быть лишь экспериментальная проверка выводимых из него следствий. Такую проверку уравнение Шредингера выдержало.

В нерелятивистской квантовой механике уравнение имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi, \quad (7.3)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $m$  – масса частицы,  $U(x, y, z, t)$  – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$  – дифференциальный оператор Лапласа,

$\Psi(x, y, z, t)$  – волновая функция частицы.

Это уравнение является волновым уравнением, решение которого позволяет найти волновую функцию (пси-функцию), однозначно описывающую состояние микро-частицы в любых условиях. Физический смысл имеет не сама волновая функция, а квадрат ее модуля, определяющий плотность вероятности пребывания частицы в данной точке пространства

$$\frac{dp}{dV} = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*, \quad (7.4)$$

где  $\Psi^*$  – величина, комплексно сопряженная с  $\Psi$ , а  $dp/dV$  – плотность вероятности (вероятность, отнесенная к единице объема) пребывания частицы в данной точке пространства. Вероятность нахождения частицы в объеме  $V$  определяется формулой

$$p = \int_V |\Psi|^2 dV. \quad (7.5)$$

Связь волновой функции и вероятности приводит к следующим ограничениям на волновую функцию: она должна быть непрерывной, конечной, однозначной, иметь непрерывные производные, удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1, \quad (7.6)$$

(наличие частицы в какой либо точке бесконечного пространства - достоверное событие, его вероятность равна 1).

Если потенциальная энергия  $U(x,y,z)$  не зависит от времени, то в уравнении волны волновую функцию можно разделить на временную и пространственную части и представить его в виде

$$\Psi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = \Psi(x, y, z) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (7.7)$$

где  $E$  – полная энергия частицы,  $\omega = E/\hbar$ . Подставляя эту формулу в общее уравнение, для пространственной части волновой функции получаем:

$$\Delta\Psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0. \quad (7.8)$$

Это уравнение называется **стационарным уравнением Шредингера** или уравнением для стационарных состояний, т.к. плотность вероятности не зависит от времени. Функции  $\Psi$ , удовлетворяющие уравнению, называются собственными функциями, а значения  $E$ , при которых существуют решения – собственными значениями энергии.

Рассмотрим несколько примеров решения этого уравнения.

#### 7.4. Движение свободной частицы

При движении свободной частицы ( $U = 0$ ) ее полная энергия совпадает с кинетической. Для частицы, движущейся вдоль оси  $X$ , стационарное уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\Psi = 0. \quad (7.9)$$

Решением его является функция

$$\Psi = A \cdot e^{ikx}, \quad (7.10)$$

где  $k = (1/\hbar) \sqrt{2mE} = P_x/\hbar$ ,  $P_x$  – импульс частицы,  $A = \text{const}$ . Тогда полную волновую функцию можно записать в виде

$$\Psi(x, t) = A e^{-i\omega t + ikx} = A e^{-(i/\hbar)(Et - P_x x)}, \quad (7.11)$$

что представляет собой плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вдоль оси  $X$ . Учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$ , для длины волны получаем  $\lambda = h/P$ , что совпадает с формулой де Бройля. Таким образом, решение уравнения Шредингера для свободной частицы представляет собой волну де Бройля. Волны де Бройля по физическому смыслу совпадают с волновой функцией и имеют статистическую интерпретацию: их интенсивность пропорциональна плотности вероятности обнаружения частицы.

Энергия свободной частицы  $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$  может принимать любые значения, т.е. энергетический спектр её является непрерывным. Вероятность обнаружения частицы не

зависит от времени и одинакова в любой точке пространства  $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* = A^2$ .

### 7.5. Частица в потенциальной яме

Рассмотрим движение микрочастицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме длиной  $l$  с бесконечно высокими стенками (рис.7.1). Тогда для потенциальной энергии имеем:  $U = 0$  при  $0 \leq x \leq l$  и  $U = \infty$  при  $x < 0$  и  $x > l$ . Внутри ямы уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi = 0,$$

или 
$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + k^2 \Psi = 0, \quad (7.12)$$

где  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ .

Решение уравнения записывается в виде

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx), \quad (7.13)$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные, которые определяются из граничных условий.

Вероятность нахождения частицы вне ямы равна нулю, следовательно, волновая функция вне ямы и на ее границах (в силу непрерывности) также равна 0:

$$\Psi(0) = \Psi(l) = 0.$$

Из первого условия  $\Psi(0) = B$  получаем  $B = 0$ , из второго

$$\Psi(l) = A \sin(kl) = 0$$

следует, что  $kl = n\pi$  или  $k = n\pi/l$ , где  $n = 1, 2, 3 \dots$  ( $n = 0$  соответствует  $\Psi = 0$ , т.е. отсутствию частицы в яме).

Тогда для собственных значений энергии получаем выражение

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (n = 1, 2, 3 \dots). \quad (7.14)$$

Таким образом, энергия и импульс частицы в потенциальной яме могут принимать лишь определенные, дискретные значения, т.е. квантуются (рис.7.1). Минимальное значение энергии равно  $E = \pi^2 \hbar^2 / (2ml^2)$ , т.е. частица в яме не может покоиться, что находится в соответствии с соотношениями неопределенности.

Интервал энергии между соседними уровнями составляет

$$\Delta E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} [(n+1)^2 - n^2] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1) \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2} n.$$

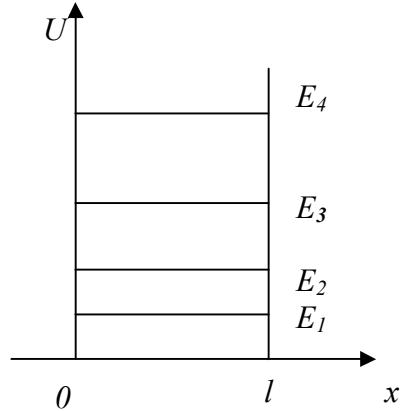


Рис.7.1

Рассмотрим несколько примеров. Для молекул идеального газа ( $m = 10^{-26}$  кг,  $l = 0,1$  м)  $\Delta E_n = 10^{-20} \cdot n$  эВ, для свободных электронов в металле ( $m \approx 10^{-30}$  кг,  $l = 0,1$  м)  $\Delta E_n = 10^{-16} \cdot n$  эВ, т.е. в этих случаях можно считать, что энергия меняется непрерывно. Для электрона в атоме ( $m \approx 10^{-30}$  кг,  $l = 10^{-10}$  м)  $\Delta E_n = 10^2 \cdot n$  эВ. Следовательно, здесь квантование существенно и можно говорить лишь о дискретном спектре энергии.

Относительное расстояние между уровнями  $\Delta E_n/E_n \approx 2/n$  уменьшается с увеличением квантового числа  $n$ , уровни располагаются ближе и спектр энергии становится квазинепрерывным.

В этом выражается **принцип соответствия Бора**: при больших квантовых числах выводы и результаты квантовой механики должны соответствовать классическим результатам.

Для определения постоянной  $A$  в волновой функции используем условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \int_0^l |\Psi|^2 dx = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\pi nx}{l}\right) dx = 1,$$

откуда  $A = \sqrt{2/l}$ .

Таким образом, собственные функции выражаются формулой

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (7.15)$$

Графики собственных функций и соответствующие плотности вероятности приведены на рис.7.2.

Из рисунка видно, что в разных квантовых состояниях есть точки, в которых плотность вероятности обнаружения частицы равна нулю. Такое поведение частицы несовместимо с классическими представлениями о траектории движения и равновероятности всех положений частицы.



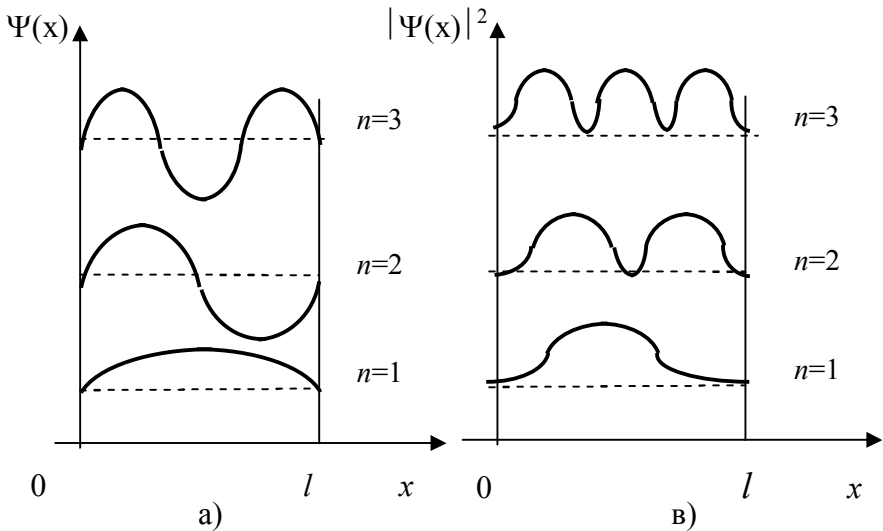


Рис.7.2

Из формулы 7.15 и рис. 7.2 следует, что существуют лишь такие состояния частицы в потенциальной яме, при которых на ширине ямы укладывается целое число полуволен де Бройля. Здесь можно провести аналогию с механическими волнами. Для колеблющейся струны или закрытого акустического резонатора возникающие стоячие волны удовлетворяют такому же условию, все остальные волны существовать не могут, они затухают.

## 7.6. Прохождение микрочастицы через потенциальный барьер

Пусть микрочастица движется вдоль оси  $X$  на которой находится прямоугольной формы потенциальный барьер шириной  $l$  и высотой  $U$  (рис.7.3).

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ U, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x > l \end{cases}$$

При данных условиях классическая частица либо беспрепятственно пройдет над барьером при  $E > U$ , либо отразится от него при  $E < U$ , и будет двигаться в противоположную сторону.

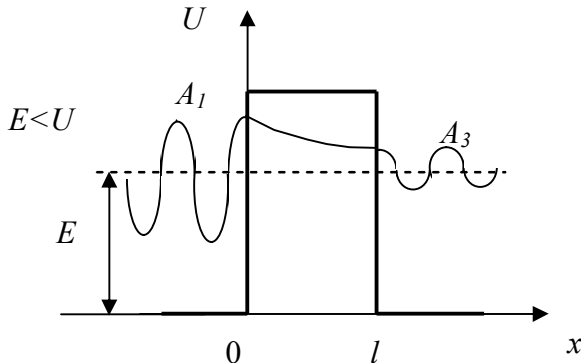


Рис.7.3

Для микрочастицы даже при энергии  $E < U$ , имеется отличная от нуля вероятность того, что частица окажется в области  $x > l$ , т.е. проникнет сквозь барьер. Это явление получило название **туннельного эффекта**.

Для описания туннельного эффекта используют понятие **коэффициента прозрачности**  $D$  потенциального барьера, определяемого как отношение плотности потока прошедших частиц к плотности потока падающих.

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}, \quad (7.16)$$

где  $A_1$  и  $A_3$  амплитуды падающей и прошедшей волн де Бройля.

Для прямоугольного потенциального барьера коэффициент прозрачности определяется из выражения

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U-E)} l\right), \quad (7.17)$$

где  $D_0$  – постоянный множитель, который можно принять равным единице.

Коэффициент прозрачности  $D$  сильно зависит от массы частицы  $m$ , ширины барьера  $l$  и от  $(U - E)$ ; чем шире барьер, тем меньше вероятность прохождения сквозь него барьера.

Туннельный эффект – это специфическое квантовое явление, не имеющее аналога в классической физике. С классической точки зрения частица, находящаяся внутри потенциального барьера при  $E < U$ , должна иметь отрицательную кинетическую энергию. С точки зрения квантовой механики деление энергии на кинетическую и потенциальную бессмысленно, поэтому ничего парадоксального в этом нет.

Туннельный эффект объясняет многие физические явления, такие, как холодная эмиссия электронов из металлов, альфа – распад, спонтанное деление ядер и другие.

### 7.7. Атом водорода в квантовой механике

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром атома водорода определяется выражением

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (7.18)$$

где  $r$  – расстояние между электроном и ядром,  $e$  – элементарный заряд.

Графически функция  $U(r)$  изображается кривой, представляющей собой гиперболическую потенциальную яму (рис.7.4).

Рассмотрим основные результаты, вытекающие из решения уравнения Шредингера для электрона в атоме водорода.

1. Энергия электрона принимает ряд дискретных значений, т.е. квантуется

$$E_n = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2n^2}, \quad (7.19)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  - главное квантовое число.

Самый нижний энергетический уровень электрона в атоме водорода называется основным, все остальные – возбужденными (рис.7.4). При этом каждому  $E_n$  (кроме  $E_1$ ) соответствует несколько волновых функций, отличающихся величиной и ориентацией момента импульса электрона. Различные состояния с одинаковой энергией называются вырожденными, а их число – кратностью вырождения.

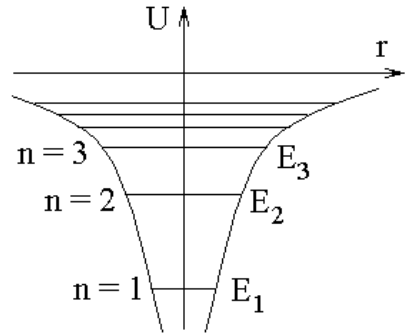


Рис.7.4

2. Момент импульса (орбитальный механический момент) электрона и его проекция на направление внешнего магнитного поля квантуется по законам

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (7.20)$$

$$L_z = \hbar m, \quad (7.21)$$

где  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  – орбитальное квантовое число;  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$  – магнитное квантовое число.

При данном значении главного квантового числа  $n$  орбитальное квантовое число  $l$  принимает  $n$  значений, а при данном  $l$  магнитное квантовое число  $m$  принимает  $(2l+1)$  значение.

Квантование проекции вектора  $L$ , получившее название пространственного квантования, обусловлено дискретностью ориентации момента импульса во внешнем поле.

Графически оно представляется в виде векторных диаграмм (рис.7.5).

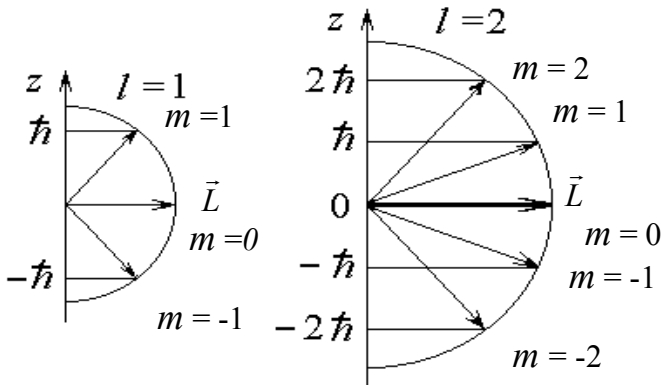


Рис.7.5

Дополнительно к этому, было установлено, что электрон, помимо орбитального, обладает и собственным механическим моментом импульса, получившим название – спин. Значение спина электрона равно

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar, \quad (7.22)$$

а его проекция на направление внешнего поля квантуется

$$L_{sz} = \hbar m_s, \quad (7.23)$$

где  $m_s = \pm 1/2$  – спиновое квантовое число.

Наряду с механическими орбитальным и спиновым моментами импульса электрон обладает магнитными орбитальным и спиновым моментами. Величина орбитального магнитного момента и его проекция на направление внешнего

магнитного поля квантуется по тем же законам, что и орбитальный механический момент

$$p_m = gL = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (7.24)$$

$$p_m = -\mu_B m, \quad (7.25)$$

где  $g = e/2m$  – гиромагнитное отношение,  $\mu_B = e \hbar/2m$  – магнетон Бора.

Собственный магнитный момент электрона ориентируется по полю или против поля, при этом

$$p_{msz} = \pm \mu_B. \quad (7.26)$$

Следовательно, магнетон Бора является как бы естественной единицей магнитного момента электрона.

Состояния электрона в атоме принято обозначать следующим образом:

$$l = 0 \Rightarrow s - \text{состояние,}$$

$$l = 1 \Rightarrow p - \text{состояние,}$$

$$l = 2 \Rightarrow d - \text{состояние,}$$

$$l = 3 \Rightarrow f - \text{состояние.}$$

Значение главного квантового числа указывается перед условным обозначением числа  $l$ . Например, электрон в состоянии с  $n = 2$  и  $l = 1$  обозначается  $2p$ , с  $n = 3$  и  $l = 0 - 3$   $s$  и т.д.

В квантовой механике нельзя говорить о траектории движения электрона в атоме. Электрон при своем движении как бы «размазан» по всему объему, образуя электронное облако, плотность которого характеризует вероятность нахождения электрона в различных точках объема атома. При этом, боровские стационарные орбиты представляют собой геометрическое место точек, в которых с наибольшей вероятностью может быть обнаружен электрон.

## 7.8. Спектр атома водорода

Спектр атома водорода является линейчатым. Спектральные линии объединяются в отдельные серии. Линию с наибольшей длиной волны среди других линий этой серии называют **головной линией**, а линию, около которой сгущаются другие линии серии, называют **коротковолновой границей**.

Все серии атома водорода можно описать обобщенной формулой Бальмера

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad (7.27)$$

где  $R = 1.09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  – **постоянная Ридберга**,  $m$  имеет постоянное для каждой серии значение ( $m = 1, 2, 3 \dots$ ), а  $n$  принимает ряд целых значений, начинающихся с  $(m + 1)$ .

В ультрафиолетовой части спектра находится **серия Лаймана** ( $m = 1$ ), в видимой – **серия Бальмера** ( $m = 2$ ), в инфракрасной области спектра лежат **серии Пашена** ( $m = 3$ ), **Брекета** ( $m = 4$ ), **Пфунда** ( $m = 5$ ). Спектральные закономерности атома водорода получают простое объяснение на основе энергетической схемы (рис.7.6).

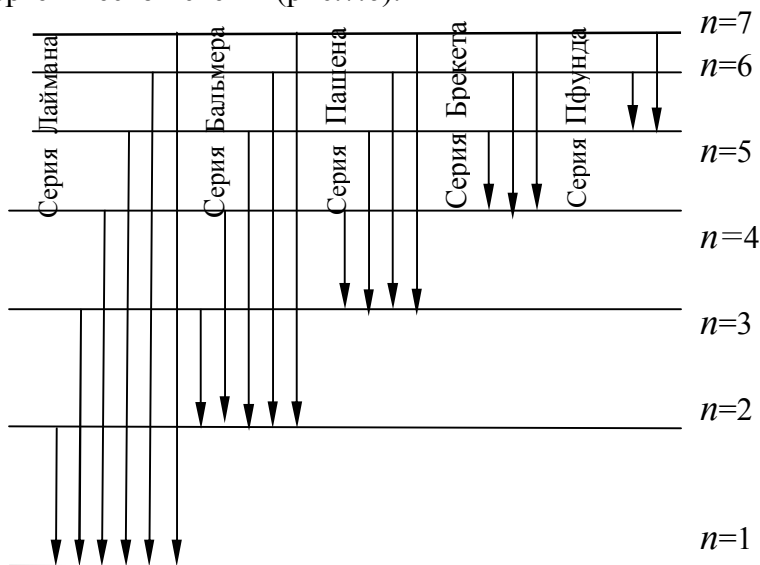


Рис.7.6

Испускание и поглощение света происходит при переходе электрона с одного энергетического уровня на другой. При этом возможны только такие переходы, при которых изменения орбитального и магнитного квантовых чисел удовлетворяют условиям

$$\Delta l = \pm 1, \quad (7.28)$$

$$\Delta m = 0, \pm 1. \quad (7.29)$$

Эти условия получили название **правил отбора**.

## 7.9. Многоэлектронные атомы. Рентгеновские спектры

Состояние каждого электрона в атоме характеризуется четырьмя квантовыми числами:

$$\begin{aligned} \text{главным} &- n = 1, 2, 3, \dots, \\ \text{орбитальным} &- l = 0, 1, 2, \dots, n-1, \\ \text{магнитным} &- m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \\ \text{спиновым} &- m_s = \pm 1/2. \end{aligned}$$

Распределение электронов в многоэлектронном атоме по состояниям подчиняется **принципу Паули**, согласно которому *в любом атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел*, т.е.

$$z(n, l, m, m_s) = 0 \text{ или } 1.$$

Пользуясь принципом Паули можно легко найти максимальное число электронов в атоме с заданным значением квантовых чисел по формулам

$$z(n, l, m) = 2, \quad (7.30)$$

$$z(n, l) = 2(2l + 1), \quad (7.31)$$

$$z(n) = 2 n^2. \quad (7.32)$$

Совокупность электронов в атоме, имеющих одно и то же квантовое число  $n$ , образует **электронную оболочку**. В каждой оболочке электроны подразделяются по **подоболочкам**, соответствующим заданному значению  $l$ . Если все состояния в электронной подоболочке заняты, то она называется замкнутой. Распределение электронов по оболочкам и подоболочкам представлено в таблице.



Номер оболочк и $n$	Число электронов в подоболочке					Количество электронов в оболочке
	$s$ $l=0$	$p$ $l=1$	$d$ $l=2$	$f$ $l=3$	$g$ $l=4$	
1	2	-	-	-	-	2
2	2	6	-	-	-	8
3	2	6	10	-	-	18
4	2	6	10	14	-	32
5	2	6	10	14	18	50

В исследовании свойств электронных оболочек атомов большую роль сыграло рентгеновское излучение. Для получения рентгеновского излучения используют рентгеновские трубки, в которых ускоренные электрическим полем электроны бомбардируют антикатод (рис.7.7).

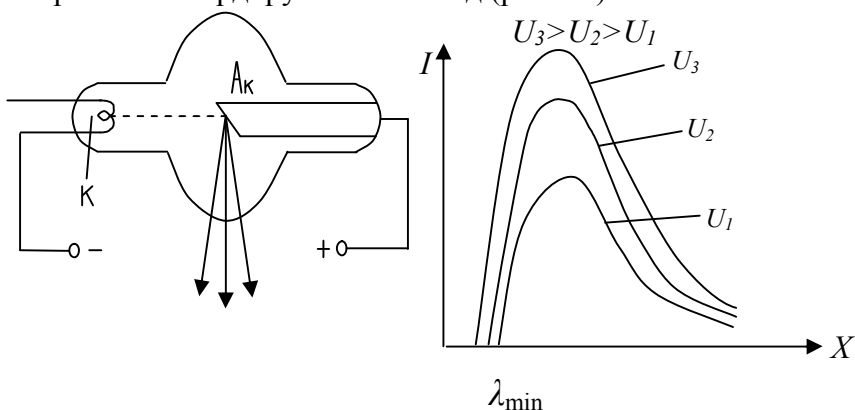


Рис.7.7

Рис.7.8

Рентгеновское излучение представляет собой электромагнитные волны с длиной  $\lambda = (10^{-12} \div 10^{-8})$  м.

**Существует два типа рентгеновского излучения.** При энергиях электронов, не превышающих некоторой критической величины, зависящей от материала антикатада, возникает излучение со **сплошным спектром** (рис.7.8), характеризующимся коротковолновой границей  $\lambda_{min}$ . С увеличением

ускоряющего напряжения между катодом и антикатодом, интенсивность излучения возрастает, а длина  $\lambda_{min}$  уменьшается.

Сплошной спектр обусловлен торможением быстрых электронов в материале антикатада и рентгеновское излучение называется тормозным. В соответствии с классической электродинамикой при торможении электронов должны возникать волны всех длин. Наличие коротковолновой границы спектра можно объяснить лишь на основе квантовых представлений. Очевидно, что максимальная энергия рентгеновского кванта, возникшего за счет энергии электрона, не может превышать этой энергии. Отсюда

$$\begin{aligned} h\nu_{max} &= eU \\ \lambda_{min} &= c/\nu_{max} = ch/eU, \end{aligned} \quad (7.33)$$

где  $U$  – ускоряющая разность потенциалов.

Вторым типом рентгеновского излучения является **характеристическое излучение**. Оно возбуждается при достаточно большой скорости электронов и имеет линейчатый спектр, характеризующий вещество антикатада рис.7.9. Атомы каждого элемента, независимо от того, в каких химических соединениях они находятся, обладают своим, вполне определенным линейчатым спектром. Как и оптические спектры, рентгеновские линейчатые спектры состоят из линий, объединенных в серии. У разных элементов наблюдаются однотипные серии линий.

Тот факт, что характеристические спектры не изменяются при химических реакциях атомов, указывает на то, что их возникновение связано с процессами, происходящими во внутренних электронных оболочках. Механизм возникновения рентгеновских серий схематически показан на рис.7.10.

При выбивании электрона, например с  $K$ -оболочки, на его место может перейти электрон с  $L$ -,  $M$ -,  $N$ -оболочки. Такие переходы приводят к возникновению  $K$ -серии. Частоты линий возрастают в ряду  $K_\alpha \rightarrow K_\beta \rightarrow K_\gamma$ , тогда как их интенсивность убывает. Аналогично возникают и другие серии.

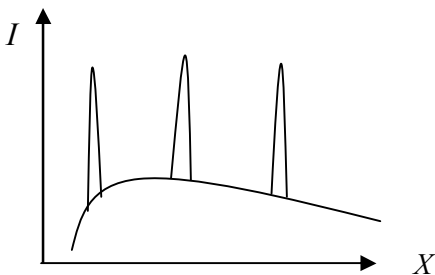


Рис.7.9

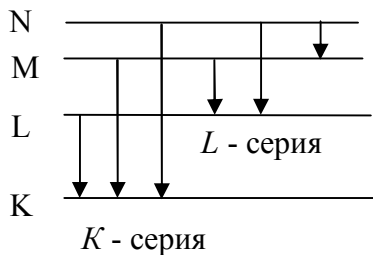


Рис.7.10

При исследовании зависимости частоты  $\nu$  характеристического излучения от атомного номера  $Z$  элемента антикатада, Мозли установил следующий закон

$$\sqrt{\nu} = c(Z - \sigma), \quad (7.34)$$

где  $\sigma$  - постоянная экранирования,  $c$  - константа, имеющая свои значения для каждой линии.

Данное соотношение можно представить в виде, напоминающем обобщенную формулу Бальмера

$$\nu = R'(Z - \sigma)^2 \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где  $R' = Rc = 3.29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$  - постоянная Ридберга,  $m = 1, 2, 3 \dots$  определяет уровень, на который переходит электрон,  $n$  принимает целочисленные значения от  $(m + 1)$  и определяет уровень, с которого переходит электрон. Постоянная экранирования для  $K$ -серии -  $\sigma = 1$ , для  $L$ -серии -  $\sigma = 7,5$ .

### 7.10. Понятие о квантовых генераторах.

С точки зрения квантовой механики основное, не возбужденное состояние атома должно сохраняться как угодно долго, если нет внешних причин, вызывающих изменение энергии атома. Под действием внешнего излучения атом осуществляет переход в возбужденное состояние, что приводит к поглощению излучения (рис. 7.11,а). Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии по

экспериментальным оценкам составляет  $\sim 10^{-8}$  с. Из этого состояния он сам собой переходит в основное состояние, излучая свет с частотой  $h\nu = E_2 - E_1$  (рис.7.11,б). Такое излучение, называется самопроизвольным или спонтанным. Поскольку спонтанные переходы атомов взаимно не связаны, то такое излучение является некогерентным. Помимо процессов поглощения и спонтанного излучения существует еще один процесс, получивший название индуцированного излучения.

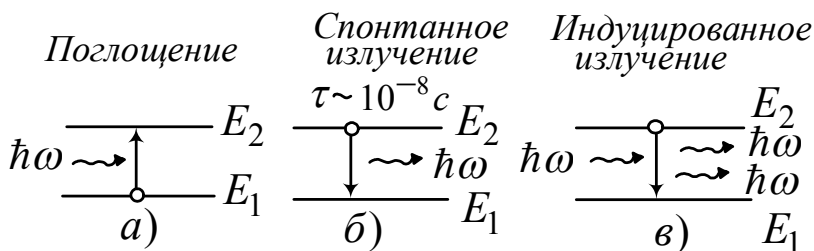


Рис.7.11.

Если на атом, находящийся в возбужденном состоянии  $E_2$ , действует внешнее излучение с частотой  $\omega$ , удовлетворяющее условию  $h\omega = E_2 - E_1$ , то существует вероятность перехода атома в основное состояние, с излучением фотона той же энергии (рис.7.11,в). Важно отметить, что вторичный фотон, испущенный атомом, тождественен первичному. Он имеет такую же частоту, фазу, поляризацию и направление распространения, как и первичный. Таким образом, *индуцированное излучение строго когерентно с вынуждающим излучением*. Фотоны, появившиеся в результате индуцированного излучения, будут усиливать свет, проходящий через среду.

При прохождении излучения через вещество акты вынужденного испускания фотонов будут преобладать над актами поглощения, если число атомов в возбужденном состоянии больше, чем в основном ( $N_2 > N_1$ ). Такие состояния называют *инверсными* (обращенными), а среды в которых за счёт вынужденных переходов происходит усиление света, - *активными*. Перевод среды в инверсное состояние называют

*накачкой*. Способы достижения и поддержания инверсии в активной среде зависят от её структуры. В твёрдых телах и жидкостях используется главным образом оптическая накачка, в газовых средах используются более эффективные методы: электрический разряд, газодинамическое истечение, химические реакции и другие, обеспечивающие высокие мощности. Возбуждение полупроводниковых сред может производиться постоянным током, пучком электронов, оптической накачкой.

Первый квантовый генератор был разработан в 1954 г. советскими физиками А.М. Прохоровым, Н.Г. Басовым и американским физиком Таунсом.

В настоящее время широкое распространение получили газовые и полупроводниковые лазеры, лазеры на сложных органических соединениях, ионные лазеры и др.

Основными компонентами любого лазера являются:

1) активная среда, в которой осуществляются вынужденные переходы;

2) система накачки, обеспечивающая инверсную населенность;

3) оптический резонатор, формирующий лазерный луч.

В простейшем случае оптический резонатор состоит из двух вогнутых параллельных зеркал (1,2), расположенных на общей оптической оси с активной средой (рис.7.12). Одно из зеркал (1) полупрозрачно. Любой фотон возникший в активной среде за счёт спонтанного испускания атомов среды является "затравкой" процесса генерации света. Фотон, который движется параллельно оси резонатора, рождает лавину фотонов, летящих в том же направлении (рис.7.12а). Часть этой лавины частично пройдёт через полупрозрачное зеркало, а часть отразится и будет нарастать в активной среде (рис.7.12.б). Те из фотонов, которые движутся вдоль оси, испытывают многократное отражение, в результате чего поток фотонов, параллельный оси резонатора, будет лавинообразно нарастать. Когда лазерный луч становится достаточно интенсивным, часть его выходит через полупрозрачное зеркало (рис.7.12.в).

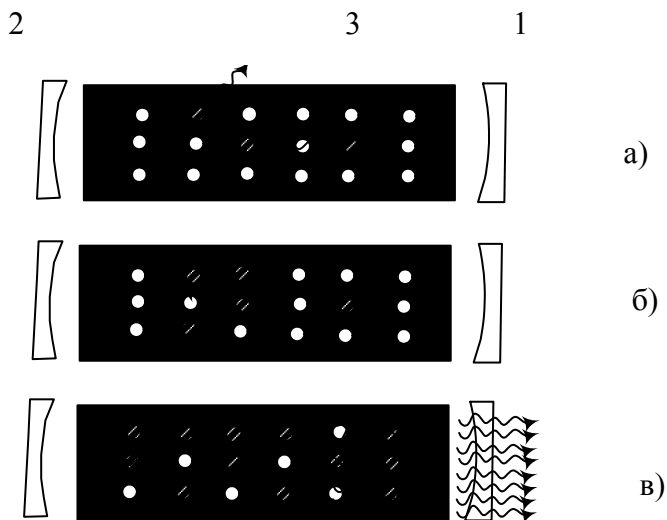


Рис.7.12.

Таким образом, с помощью зеркал в оптическом квантовом генераторе реализуется положительная обратная связь, необходимая для того, чтобы был обеспечен режим генерации, и формируется лазерное излучение с высокими когерентными свойствами.

Основные свойства лазерного излучения:

- временная и пространственная когерентность ( $l_k \sim 10^{-5}$  м);
- строгая монохроматичность ( $\Delta\lambda < 10^{-11}$  м);
- большая мощность излучения ( $\sim 10^{10}$  Вт/м);
- узость пучка;

Основные области применения лазеров:

- обработка, резание и микросварка твердых металлов;
- получение и исследование высокотемпературной плазмы,
- управление термоядерным синтезом;
- измерительная техника;
- создание систем голографической памяти с высокой степенью считывания и большой емкостью;
- микрохирургия.

## 7.11. Примеры решения задач по квантовой механике и физике атома

**Пример 1.** Поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой щелью шириной  $b = 2 \text{ мкм}$ . Найти скорость электронов, если на экране, отстоящем от щели на  $L = 50 \text{ см}$ , ширина центрального дифракционного максимума  $\Delta x = 0,36 \text{ мм}$ .

### Решение

Согласно гипотезе де Бройля длина волны  $\lambda$ , соответствующая частице массой  $m$ , движущейся со скоростью  $V$ , выражается формулой

$$\lambda = h/mV. \quad (1)$$

При дифракции на узкой щели ширина центрального дифракционного максимума равна расстоянию между дифракционными минимумами первого порядка. Дифракционные минимумы при дифракции на одной щели наблюдаются при условии

$$b \sin \varphi = k \lambda, \quad (2)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$  - порядковый номер минимумов.

Для минимумов первого порядка ( $k=1$ ), угол заведомо мал, поэтому  $\sin \varphi = \varphi$ , и, следовательно, формула (2) примет вид

$$b \varphi = \lambda, \quad (3)$$

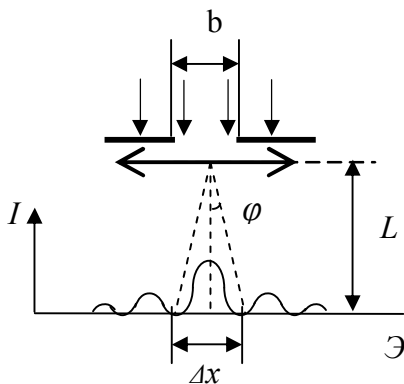
ширина центрального максимума

$$\Delta x = 2L \operatorname{tg} \varphi = 2L \varphi. \quad (4)$$

Выражая  $\varphi$  из (4) и подставляя его в (3), получаем

$$\lambda = b \Delta x / 2L. \quad (5)$$

Искомую скорость электронов найдем из соотношения (1) с учетом формулы (5):



$$V = h/m \lambda = 2 h L / m b \Delta x. \quad (6)$$

После вычисления по формуле (6) получим  $V = 10^6$  м/с.

**Пример 2.** Определить длину волны де Бройля  $\lambda$  электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов 700 кВ.

### Решение

Связь длины волны де Бройля с импульсом

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

где  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка, причём импульс вычисляется различным образом для релятивистского ( $p = \frac{1}{c} \sqrt{(2E_0 + T)T}$ ) и нерелятивистского ( $p = \sqrt{2mT}$ ) случаев, где  $m$ ,  $T$ ,  $E_0$  – соответственно масса, кинетическая энергия, энергия покоя частицы.

Кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U$ ,

$$T = |e| U = 0,7 \text{ эВ},$$

а энергия покоя электрона  $E_0 = mc^2 = 0,511$  МэВ, т.е. в данном случае имеем дело с релятивистской частицей.

Тогда искомая длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2E_0 + T)T}} = \frac{hc}{\sqrt{(2mc^2 + |e|U)|e|U}},$$

где  $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Вычисляя, получаем  $\lambda = 1,13$  нм.

**Пример 3.** Используя соотношения неопределенностей  $\Delta x \Delta p_x \geq h / 2\pi$ , найти выражение, позволяющее оценить минимальную энергию  $E$  электрона, находящегося в одномерном потенциальном ящике шириной  $l$ .

### Решение

Из данного соотношения следует, что, чем точнее



определяется положение частицы, тем более неопределенным становится импульс, а, следовательно, и энергия частицы. Неопределенность координаты электрона  $\Delta x = l / 2$ . Тогда соотношение неопределенностей можно записать в виде

$$l/2 \Delta p \geq h/2\pi,$$

откуда

$$\Delta p \geq h/\pi l.$$

Физически разумная неопределенность импульса  $\Delta p$ , во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса, т.е.  $p \geq \Delta p$ .

Энергия  $E$  электрона, находящегося в одномерном потенциальном ящике, есть его кинетическая энергия  $T$ , величину которой можно связать с импульсом соотношением

$$T = p^2 / 2m.$$

Заменив  $p$  на  $\Delta p$ , получим

$$E_{min} = (h^2/2\pi^2)/(m l^2).$$

**Пример 4.** Электрон находится в бесконечно глубокой одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной  $L$ . Вычислить вероятность обнаружения электрона на первом энергетическом уровне в интервале  $L/4$ , равноудаленном от стенок ямы.

### Решение

Вероятность  $P$  обнаружить частицу в интервале  $x_1 < x < x_2$  определяется равенством

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx, \quad (1)$$

где  $\psi(x)$  – нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальной яме, имеет вид

$$\Psi_n(x) = (2/L)^{1/2} \sin(\pi n x/L).$$

Невозбужденному состоянию ( $n = 1$ ) отвечает волновая функция

$$\Psi_1(x) = (2/L)^{1/2} \sin(\pi x/L). \quad (2)$$

Подставив  $\Psi_1(x)$  в подынтегральное выражение формулы (1) и вынося постоянные за знак интеграла, получим

$$P = (2/L) \int_{x_1}^{x_2} \sin^2(\pi x/L) dx, \quad (3)$$

Согласно условию задачи  $x_1 = 3L/8$  и  $x_2 = 5L/8$ . Произведя замену

$$\sin^2(\pi x/L) = 1/2 [1 - \cos(2\pi x/L)],$$

получим

$$P = (2/L) \int_{x_1}^{x_2} \sin^2(\pi x/L) dx = 0,475.$$

**Пример 5.** Электрон в возбужденном атоме водорода находится в  $3d$  – состоянии. Определить изменение механического и магнитного моментов, обусловленных орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

### Решение

Изменение механического  $\Delta L$  и магнитного  $\Delta P_m$  моментов находится как разность моментов в конечном (основном) и начальном (возбужденном) состояниях, т.е.

$$\Delta L = L_2 - L_1,$$

$$\Delta P_m = \Delta P_{m2} - \Delta P_{m1}.$$

Механические и магнитные моменты орбитального движения электрона зависят только от орбитального квантового числа  $l$ :

$$L = (h/2\pi) (l(l+1))^{1/2}, \quad P_m = \mu_B (l(l+1))^{1/2}.$$

Учитывая, что в основном состоянии  $l=0$ ,  $L_2=0$ ,  $P_m=0$ , а в возбужденном состоянии ( $3d$ )  $l=2$ ,  $L_1 = (h/2\pi)\sqrt{6}$ ,

$P_{m_1} = \mu_B \sqrt{6}$ , найдем изменение орбитального механического и магнитного моментов:

$$\Delta L = -(h/2\pi)\sqrt{6}, \quad \Delta P_m = -\mu_B \sqrt{6} .$$

Знак минус показывает, что в данном случае происходит уменьшение орбитальных моментов.

Подставив значения, получим

$$\Delta L = -2,57 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с};$$
$$\Delta P_m = -2,27 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Тл}.$$

**Пример 6.** Определить скорость электронов, падающих на антикатод рентгеновской трубки, если минимальная длина волны  $\lambda_{min}$  в сплошном спектре рентгеновского излучения равна 1 нм.

### Решение

В рентгеновской трубке электрон приобретает кинетическую энергию  $T = mV^2/2$ , которая связана с ускоряющей разностью потенциалов  $U$  соотношением

$$T = eU, \tag{1}$$

где  $e$  – заряд электрона.

Следовательно, скорость электронов, падающих на антикатод рентгеновской трубки, зависит от напряжения, приложенного к рентгеновской трубке:

$$V = (2e U/m)^{1/2}. \tag{2}$$

Тормозное рентгеновское излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении. В соответствии с законом сохранения энергии энергия фотона не может превысить кинетическую энергию электрона. Максимальная энергия фотона определяется равенством

$$h\nu_{max} = hc/\lambda_{min} = T = eU. \tag{3}$$

Из последнего выражения находим  $U$  и, подставляя в (2), получаем:

$$V = (2hc/(m\lambda_{min}))^{1/2}.$$

Произведя вычисления, найдем:

$$V \approx 21 \text{ Мм/с} .$$

**Пример 7.** Вычислить длину волны  $\lambda$  и энергию  $\varepsilon$  фотона, принадлежащего  $K_\alpha$ -линии в спектре характеристического рентгеновского излучения платины.

### Решение

$K_\alpha$  - линия в спектре характеристического рентгеновского излучения платины возникает при переходе электрона с  $L$ -слоя на  $K$ -слой. Длина волны этой линии определяется по закону Мозли:

$$1/\lambda = R(z - \sigma)^2 \left( (1/m^2) - (1/n^2) \right). \quad (1)$$

Учитывая, что  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\sigma = 1$  (для  $K$ -серии),  $z = 78$  (для платины), а постоянная Ридберга  $R = 1,1 \times 10^{-7} \text{ 1/м}$ , находим:

$$\lambda = 20,5 \times 10^{-12} \text{ м}$$

Зная длину волны, определим энергию фотона по формуле

$$\varepsilon = hc / \lambda. \quad (2)$$

Подстановка числовых значений дает  $\varepsilon = 60,5 \text{ кэВ}$ .

## 8. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ЯДРА

### 8.1. Основные свойства и строение ядра

**Ядро** - центральная часть атома, в которой сосредоточена практически вся масса атома и его положительный электрический заряд. Все ядра состоят из **протонов** ( $p$ ) и **нейтронов** ( $n$ ), которые считаются двумя зарядовыми состояниями одной частицы – нуклона. Протон имеет положительный заряд, равный по величине заряду электрона. Нейтрон не имеет заряда.

Ядро химического элемента обозначают  ${}_Z X^A$ , где  $X$  – символ химического элемента,  $Z$  – порядковый номер в таблице Менделеева, равный числу протонов в ядре,  $A$  -

массовое число, равное числу нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре, следовательно, число нейтронов в ядре  $N = A - Z$ , заряд ядра  $q_e = eZ$ . Ядра с одинаковыми  $Z$ , но различным  $A$  называются **изотопами** (например  ${}_1H^1, {}_1H^2, {}_1H^3$  - изотопы водорода).

Размер ядра характеризуется радиусом, равным

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (8.1)$$

где  $R_0 = (1.3 \div 1.7)10^{-15} \text{ м}$ .

Плотность ядерного вещества постоянна для всех ядер и составляет  $\approx 10^{17} \text{ кг/м}^3$ .

Между нуклонами в ядре существует сильное **ядерное взаимодействие**, обеспечивающее устойчивость ядер несмотря на отталкивание одноименно заряженных протонов. Ядерные силы являются короткодействующими и проявляются лишь на расстояниях между нуклонами порядка  $10^{-15} \text{ м}$ . Они обнаруживают **зарядовую независимость**: притяжение между двумя нуклонами одинаково независимо от их зарядового состояния. Ядерные силы обладают **свойством насыщения**, которое проявляется в том, что нуклон в ядре взаимодействует лишь ограниченным числом ближайших к нему соседей. Наконец, ядерные силы не являются центральными и зависят от ориентации взаимодействующих нуклонов.

Одной из важнейших величин, характеризующих прочность ядра, является **энергия связи ядра**. Она определяется работой, которую нужно совершить, чтобы расщепить ядро на составляющие его нуклоны. Мерой энергии связи ядра служит **дефект массы**, характеризующий уменьшение суммарной массы при образовании ядра из составляющих его нуклонов

$$E_{св} = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{яд}]c^2,$$

или

$$E_{св} = [Zm_H + (A - Z)m_n - m_{ам}]c^2, \quad (8.2)$$

где  $m_p$  и  $m_n$  - массы протона и нейтрона,  $m_H$  - масса водорода,  $m_{яд}$  - масса ядра,  $m_{ат}$  - масса атома.

Энергия связи, приходящаяся на один нуклон

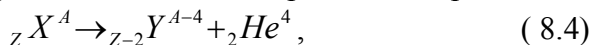
$$\omega_{св} = \frac{E_{св}}{A}, \quad (8.3)$$

называется **удельной энергией связи**. Она зависит от массового числа элемента. Для легких ядер удельная энергия связи круто возрастает до 6-7 МэВ, затем более медленно возрастает до максимальной величины 8.7 МэВ у элементов с  $A=50-60$ , а потом постепенно уменьшается у тяжелых элементов. Таким образом, наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева. Это означает, что энергетически выгодно как деление тяжелых ядер на более легкие, так и слияние легких ядер в более тяжелые.

## 8.2. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада

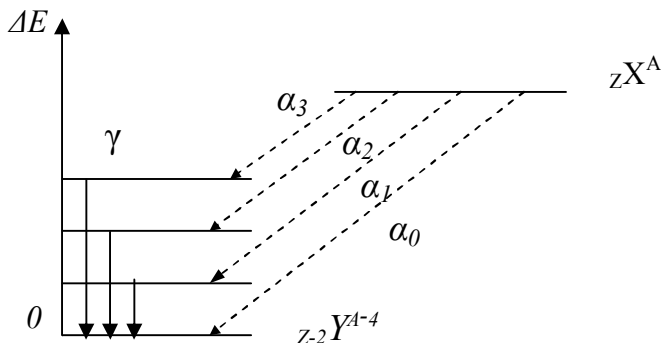
Под радиоактивностью понимается способность некоторых изотопов одного химического элемента самопроизвольно превращаться в изотопы другого элемента с испусканием различных видов излучений. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется **материнским**, возникающее ядро – **дочерним**. К основным типам радиоактивности относят  $\alpha$ - и  $\beta$ -распад.

**Альфа-распад** является свойством тяжелых ядер ( $A > 200$ ), внутри которых происходит обособление двух протонов и двух нейтронов ( $\alpha$ -частицы) и их вылет из ядра. Правило смещения, в основе которого лежат законы сохранения заряда и массового числа, позволяет установить, какое ядро возникает при распаде данного материнского ядра



где  ${}_2 He^4$  - ядро гелия ( $\alpha$ -частица).

Энергетическая схема  $\alpha$  - распада представлена на рисунке.



Видно, что  $\alpha$  - частицы имеют определённые значения энергии. Это связано с тем, что ядра обладают дискретными энергетическими уровнями и возникающее дочернее ядро, как правило, оказывается в различных возбуждённых состояниях ( $\Delta E$  – превышение энергии дочернего ядра и  $\alpha$  частицы над энергией покоя дочернего ядра). Его переход в основное состояние сопровождается  $\gamma$  - излучением.

К  $\beta$  - распаду относятся электронный ( $\beta_-$ ) и позитронный ( $\beta_+$ ) распады, а также электронный захват ( $K$  - захват), которые подчиняются следующим правилам смещения:

$$\beta_- \text{ - распад} \quad {}_Z X^A \rightarrow {}_{Z+1} Y^A + {}_{-1} e^0 + \tilde{\nu};$$

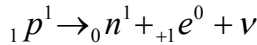
$$\beta_+ \text{ - распад} \quad {}_Z X^A \rightarrow {}_{Z-1} Y^A + {}_{+1} e^0 + \nu;$$

$$K \text{ - захват} \quad {}_Z X^A + {}_{-1} e^0 \rightarrow {}_{Z-1} Y^A + \nu;$$

где  ${}_{-1} e^0$  - электрон,  ${}_{+1} e^0$  - позитрон (античастица электрона).

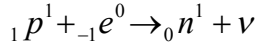
Данные распады происходят путём самопроизвольного превращения одного вида нуклона в ядре в другой (нейтрона в протон или протона в нейтрон). Эти превращения совершаются по схемам

$${}_0 n^1 \rightarrow {}_1 p^1 + {}_{-1} e^0 + \tilde{\nu}$$



где  $\nu$  и  $\tilde{\nu}$  - электронные нейтрино и антинейтрино, имеющие нулевой заряд и весьма малую массу.

В случае  $K$  - захвата превращение протона в нейтрон происходит по схеме



и заключается в том, что протон как бы “захватывает” один из электронов на ближайшей к ядру  $K$  - оболочке атома. При этом, электронный захват сопровождается характеристическим рентгеновским излучением, обусловленным переходом электронов атома с вышестоящих оболочек на  $K$ - оболочку.

Энергетический спектр  $\beta$  - частиц является непрерывным что связано с хаотическим распределением уносимой энергии между  $\beta$  -частицей и нейтрино.  $\beta$  - распад также сопровождается  $\gamma$  -излучением, испускаемым дочерним ядром при его переходе в основное состояние.

Самопроизвольный распад атомных ядер подчиняется закону радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (8.5)$$

где  $N_0$  - начальное число ядер,  $N$  - число не распавшихся ядер в момент времени  $t$ ,  $\lambda$  - постоянная радиоактивного распада.

Промежуток времени, за который распадается половина первоначального количества ядер, называется периодом полураспада. Согласно (8.5)

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T} \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (8.6)$$

Среднее время жизни радиоактивного изотопа является величиной, обратной постоянной радиоактивного распада, т.е.

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (8.7)$$

Интенсивность радиоактивного распада характеризует активность распада



$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N \quad (8.8)$$

Данная величина представляет собой число распадов радиоактивного вещества за единицу времени. Активность, отнесённая к единице массы вещества, называется удельной активностью.

Единица активности в СИ - беккерель (*Бк*) - активность, при которой за 1с происходит один акт распада. Внесистемная единица активности—Кюри (*Ku*):

$$1 \text{ Ku} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Бк.}$$

### 8.3. Ядерные реакции

Ядерной реакцией называется процесс взаимодействия ядра с другим ядром или элементарной частицей, приводящий к преобразованию ядер. Символическая запись ядерной реакции

$$X(a, b)Y, \quad (8.9)$$

где *X* и *Y* - исходное и конечное ядра, *a* и *b* - исходная и конечная частицы в реакции.

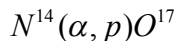
**В любой ядерной реакции выполняются законы сохранения электрического заряда и массового числа.** При протекании ядерной реакции энергия либо выделяется, либо поглощается. Тепловой эффект у ядерной реакции определяется выражением

$$Q = c^2 (\sum m_1 - \sum m_2), \quad (8.10)$$

где  $\sum m_1$  - сумма масс частиц до реакции,  $\sum m_2$  - сумма масс частиц после реакции.

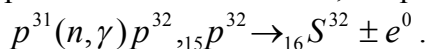
Если  $\sum m_1 > \sum m_2$ , то  $Q > 0$ , если  $\sum m_1 < \sum m_2$ , то  $Q < 0$ .

Первая ядерная реакция была осуществлена с помощью  $\alpha$  - частиц Резерфордом. Уравнение этой реакции



Наибольшее значение имеют реакции, вызываемые

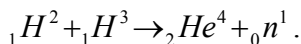
нейтронами, поскольку они не испытывают кулоновского отталкивания и могут проникать в ядра, обладая малой энергией. Взаимодействие нейтронов с ядрами состоит, главным образом, либо в упругом рассеянии нейтронов на ядрах, либо захвате нейтронов ядрами. Быстрые нейтроны  $\{E=(0,1-50) \text{ МэВ}\}$  в веществах, называемых замедлителями (графит, тяжёлая вода), рассеиваются на ядрах, в результате нейтроны становятся тепловыми ( $E \approx 0,025 \text{ эВ}$ ). Для медленных нейтронов характерно упругое рассеяние на ядрах (реакция типа  $(n,n)$ ) и радиационный захват ( $\text{Cd}(n,\gamma)\text{Cd}$ ). Часто в результате реакции радиационного захвата образуются искусственно - радиоактивные изотопы, например



Важное значение имеет реакция деления тяжёлых ядер, сопровождающаяся выделением огромной энергии. Так, под действием тепловых нейтронов ядро изотопа урана  $U^{235}$  делится на два осколка с выделением энергии  $\approx 200 \text{ МэВ}$ . При этом реакция деления сопровождается испусканием двух-трёх нейтронов, называемых мгновенными. Радиоактивные осколки деления при своём распаде также выделяют нейтроны, которые называются запаздывающими.

Возникновение при реакции деления нескольких нейтронов делает возможным осуществление цепной ядерной реакции. Условием возникновения цепной ядерной реакции является наличие размножающихся нейтронов. Развитие ядерной энергетики связано с осуществлением управляемых цепных реакций, которые реализуются на атомных электростанциях.

Вторым путём выделения внутриядерной энергии, помимо деления тяжёлых ядер, являются реакции синтеза лёгких ядер. Эти реакции могут проходить лишь при температурах выше  $\approx 10^7 \text{ К}$ , поэтому они называются термоядерными реакциями. Примером такой реакции является синтез дейтерия и трития



При данной реакции выделяется энергия 17,6 МэВ, что примерно в четыре раза больше, чем в реакции деления урана.

Термоядерные реакции являются главным источником энергии Солнца и звёзд. Особый интерес представляет осуществление управляемой термоядерной реакции, которая откроет доступ к неисчерпаемым запасам ядерной энергии. Решение этой проблемы дело недалёкого будущего.

#### 8.4. Примеры решения задач по ядерной физике

**Пример 1.** Определить начальную активность  $A_0$  радиоактивного препарата магния  $Mg^{27}$  массой  $m = 0.2$  мкг, а также его активность  $A$  через время  $t = 6$  час. Период полураспада магния  $T = 600$ с.

##### Решение

Активность препарата определяется отношением

$$A = -\frac{dN}{dt}, \quad (1)$$

где знак “-“ показывает, что число  $N$  радиоактивных ядер убывает с течением времени.

Согласно закону радиоактивного распада

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

Продифференцировав выражение (2) по времени, получим

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Следовательно

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \quad (3)$$

и

$$A_0 = \lambda N_0. \quad (4)$$

Число радиоактивных ядер в начальный момент времени равно произведению количества вещества данного изотопа на постоянную Авогадро:

$$N_0 = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A, \quad (5)$$

где  $m$  - масса изотопа,  $M$  - молярная масса. Постоянная радиоактивного распада связана с периодом полураспада соотношением

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0.693}{T}. \quad (6)$$

С учётом (5) и (6) формулы для расчёта активности принимают вид

$$A_0 = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T} N_A = \frac{m}{M} \frac{\ln 2}{T} N_A e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Произведя вычисления, получим

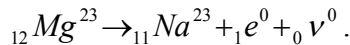
$$A_0 = \frac{0.2 \cdot 10^{-9}}{27 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{0.693}{600} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 5.13 \cdot 10^{12}. \quad (\text{Бк})$$

$$A = 5.13 \cdot 10^{12} e^{-\frac{0.693}{600} \cdot 2.16 \cdot 10^4} = 81.3 (\text{Бк}).$$

**Пример 2.** Радиоактивное ядро магния  $Mg^{23}$  выбросило позитрон и нейтрино. Определить энергию  $Q$   $\beta^+$  - распада ядра.

### Решение

Реакцию распада ядра магния можно записать следующим образом:



Принимая, что ядро магния было неподвижным и учитывая, что масса покоя нейтрино равна нулю, напишем уравнение энергетического баланса. На основании закона сохранения релятивистской полной энергии имеем

$$c^2 m_{Mg} = c^2 m_{Na} + T_{Na} + c^2 m_e + T_e + T_\nu.$$

Энергия распада

$$Q = T_{Na} + T_e + T_\nu = c^2 (m_{Mg} - m_{Na} - m_e).$$

Выразим массы ядер магния и натрия через массы

соответствующих нейтральных атомов

$$Q = c^2 [(M_{Mg} - 12m_e) - (M_{Na} - 11m_e) - m_e].$$

Так как массы покоя электрона и позитрона одинаковы, то после упрощений получим

$$Q = c^2 (M_{Mg} - M_{Na} - 2m_e).$$

Найдя по таблице числовые значения масс, и учитывая, что  $c^2 = 931 \text{ МэВ/а.е.м.}$ , получим

$$Q = 3.05 \text{ МэВ.}$$

## 9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Под элементарными частицами подразумевают частицы, которым нельзя приписать внутренней структуры. Основными характеристиками элементарных частиц являются масса покоя, спин, электрический заряд, магнитный момент частицы, время жизни частицы.

Известные на сегодняшний день элементарные частицы можно классифицировать на определенные классы. В особую группу выделяются **фотоны**, их спин  $s = 1$ , электрический заряд  $e = 0$ , собственная масса  $m_0 = 0$ .

Вторую группу составляют легкие частицы - **лептоны**. Все частицы этой группы обладают спином  $s = 1/2$ , имеют собственную отличную от нуля массу, могут быть как электрически нейтральными, так и заряженными. К этой группе относятся  $\nu_e, \nu_e, \nu_\mu, e^+, e^-, \mu^+, \mu^-$ .

Третья группа — **мезоны**. Все частицы этой группы имеют собственную массу, нулевой спин:  $s = 0$ . Они могут быть как электрически нейтральными, так и заряженными. К ним относятся  $\pi$ -мезоны, ( $\pi^+$ ;  $\pi^0$ ;  $\pi^-$ ), K-мезоны ( $K^+$ ;  $K^0$ ;  $K^-$ ).

В четвертую группу входят тяжелые частицы, их называют **барионами**. К ним относятся нуклоны ( $p, n$ ) и

гипероны. Все барионы обладают полужелтым спином. Мезоны и барионы называют **адронами**.

В зависимости от времени жизни частицы делятся на стабильные и нестабильные.

Стабильные - это частицы, которые спонтанно не распадаются на другие (например,  ${}^0_1e$ ,  ${}^1_1p$ , их время жизни превышает  $\tau = 10^{20}$  лет). Нестабильные частицы имеют малое время жизни. Для мезонов  $\tau = 10^{-8}$  с, для гиперонов  $\tau = 10^{-10}$  с.

Для каждой частицы существует античастица. Примеры частиц и античастиц: электрон  ${}^0_{-1}e$  и позитрон  ${}^0_{+1}e$ , мюоны  $\mu^+$  и  $\mu^-$ , пионы  $\pi^+$  и  $\pi^-$ , каоны  $K^+$  и  $K^-$  и др. Массы покоя, спины и времена жизни у частиц и античастиц одинаковы. Электрические заряды у частиц и античастиц равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку.

Различают четыре типа взаимодействия частиц: сильное; электромагнитное; слабое; гравитационное. Характеристики этих взаимодействий даны в таблице. Самым интенсивным является сильное взаимодействие (порядок интенсивности каждого взаимодействия определен по отношению к сильному взаимодействию, принятому за единицу).

Большинство частиц обладает способностью к нескольким типам взаимодействия одновременно. Сильное взаимодействие свойственно адронам. Примером сильного взаимодействия могут служить ядерные силы, действующие между нуклонами и обеспечивающие стабильность атомных ядер. Примером слабого взаимодействия является процесс  $\beta$  - распада. Слабое взаимодействие присуще всем частицам, кроме фотонов. В электромагнитном взаимодействии участвуют только электрически заряженные частицы и фотоны. Все частицы способны к гравитационным взаимодействиям, но величина их настолько мала, что в масштабах микромира их влияние в расчет не принимается.

Тип взаимодействия	Сравнительная величина интенсивности взаимодействия	Радиус действия сил, м.	Время протекания процесса, с.
1) Сильное (ядерное)	1	$10^{-15}$	$10^{-23}$
2) Электромагнитное	$10^{-4}$	$\infty$	$10^{-20}$
3) Слабое (распадное)	$10^{-20}$	$10^{-13}$	$10^{-10}$
4) Гравитационное	$10^{-40}$	$\infty$	

В 1964 г. М. Гелл-Манн и Дж. Цвейг предложили гипотезу, согласно которой все адроны построены из простейших частиц, получивших название **кварки**. Согласно этой гипотезе, *барионы* состоят из трех кварков: *u*, *d*, *s*, *антибарионы* - из трех *антикварков*. Эти кварки должны иметь полуцелый спин, их электрический заряд должен быть равным  $1/3$  или  $2/3$  заряда электрона. В дальнейшем было предположено существование еще двух кварков - «очарованный» и «красивый» - с соответствующими антикварками. Комбинации кварков и антикварков дали все известные мезоны. По современным представлениям, кварки лишены внутренней структуры, в этом смысле их можно считать истинно элементарными частицами.

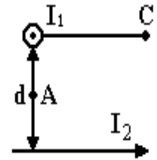
Кварки в свободном состоянии не были обнаружены, несмотря на многочисленные их поиски на ускорителях высоких энергий, в космических лучах и окружающей среде. Гипотеза кварков положила начало созданию единой теории, объединяющей четыре фундаментальных взаимодействия.

## 10. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

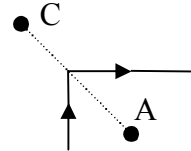
1. Вычислить магнитную индукцию поля, создаваемого отрезком АВ прямолинейного проводника с током в точке С, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии 6 см от него. По проводнику течет ток 30 А. Отрезок АВ проводника виден из точки С под углом  $90^\circ$ .

2. Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии 10 см друг от друга. По проводникам текут токи  $I_1 = I_2 = 5$  А в противоположных направлениях. Найти величину и направление магнитной индукции поля в точке, находящейся на расстоянии 10 см от каждого проводника.

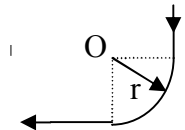
3. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом. По проводникам текут токи  $I_1 = 80$  А и  $I_2 = 60$  А. Расстояние между проводниками  $d = 10$  см. Чему равна магнитная индукция в точках А и С, одинаково удаленных от обоих проводников?



4. Бесконечно длинный прямой проводник согнут под прямым углом. По проводнику течет ток  $I = 100$  А. Вычислить магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных от вершин угла на  $a = 20$  см.



5. По бесконечно длинному прямому проводу, изогнутому так, как показано на рисунке, течет ток  $I = 100$  А. Определить индукцию В в точке О, если  $r = 10$  см.

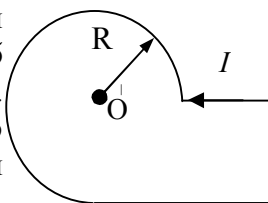


6. По тонкому проводящему кольцу радиусом  $R = 10$  см течет ток  $I = 80$  А. Найти магнитную индукцию в точке, равноудаленной от всех точек кольца на  $r = 20$  см.

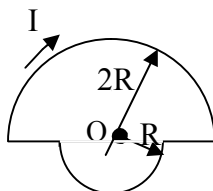
7. По контуру в виде квадрата течет ток  $I = 50$  А. Длина стороны квадрата равна 20 см. Определить магнитную индукцию В в точке пересечения диагоналей.



8. Бесконечно длинный тонкий проводник с током  $I = 50 \text{ А}$  имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10 \text{ см}$ . Определить в точке  $O$  магнитную индукцию  $B$  поля, создаваемого этим током.



9. По плоскому контуру из тонкого провода течет ток  $I = 100 \text{ А}$ . Определить магнитную индукцию  $B$  поля, создаваемого этим током в точке  $O$ . Радиус  $R$  изогнутой части контура равен  $20 \text{ см}$ .



10. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменится магнитная индукция в центре контура?

11. Катушка длиной  $l = 20 \text{ см}$  содержит  $N = 100$  витков. По обмотке катушки течет ток  $I = 5 \text{ А}$ . Диаметр катушки  $d = 20 \text{ см}$ . Определить магнитную индукцию в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии  $a = 10 \text{ см}$  от ее конца.

12. Магнитная индукция  $B$  на оси тороида без сердечника (внешний диаметр сердечника  $d_1 = 60 \text{ см}$ , внутренний  $d_2 = 40 \text{ см}$ ), содержащего  $N = 200$  витков, составляет  $0,16 \text{ мТл}$ . Пользуясь теоремой о циркуляции вектора  $B$ , определить силу тока в обмотке тороида.

13. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи  $I = 1 \text{ кА}$ . Определить силу  $F$ , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

14. Тонкий провод в виде дуги, составляющей треть кольца радиусом  $R = 15 \text{ см}$ , находится в однородном магнитном поле ( $B = 20 \text{ мТл}$ ). По проводу течет ток  $I = 30 \text{ А}$ . Плоскость, в которой лежит дуга, перпендикулярна линиям

магнитной индукции, и подводящие провода находятся вне поля. Определить силу  $F$ , действующую на провод.

15. По тонкому проводу в виде кольца радиусом  $R = 20 \text{ см}$  течет ток  $I = 100 \text{ А}$ . Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией  $B = 20 \text{ мТл}$ . Найти силу  $F$ , растягивающую кольцо.

16. Двухпроводная линия состоит из длинных параллельных прямых проводов, находящихся на расстоянии  $d = 4 \text{ мм}$  друг от друга. По проводам текут одинаковые токи  $I = 50 \text{ А}$ . Определить силу взаимодействия токов, приходящуюся на единицу длины провода.

17. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом  $R = 10 \text{ см}$  находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$ . По проводнику течет ток  $I = 10 \text{ А}$ . Найти силу, действующую на проводник, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

18. По двум тонким проводникам, изогнутым в виде кольца радиусом  $R = 10 \text{ см}$ , текут одинаковые токи по  $10 \text{ А}$  в каждом. Найти силу взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца параллельны, а расстояние между центрами колец  $d = 10 \text{ мм}$ .

19. По кольцу, сделанному из тонкого гибкого провода радиусом  $R = 10 \text{ см}$ , течет ток  $I = 100 \text{ А}$ . Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле, индукция которого  $B = 0,1 \text{ Тл}$ . Собственное магнитное поле кольца и внешнее поле совпадают. Определить работу внешних сил, которые, действуя на проводник, деформировали его и придали ему форму квадрата. Сила тока при этом поддерживалась неизменной. Работой против упругих сил пренебречь.

20. Виток, по которому течет ток  $I = 20 \text{ А}$ , свободно установился в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,016 \text{ Тл}$ . Диаметр витка  $d = 10 \text{ см}$ . Какую работу нужно совершить, чтоб повернуть виток на угол  $\alpha = \pi/2$  относительно оси, совпадающей с диаметром?

21. Ион, несущий один элементарный заряд, движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,015 \text{ Тл}$  по окружности радиусом  $r = 10 \text{ см}$ . Чему равен импульс иона?

22. Частица, несущая один элементарный заряд, влетела в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,5 \text{ Тл}$ . Определить момент импульса, которым обладала частица при движении в магнитном поле, если ее траектория представляла дугу окружности радиусом  $0,2 \text{ см}$ .

23. Заряженная частица, обладающая скоростью  $v = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ , влетела в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,52 \text{ Тл}$ . Найти отношение заряда частицы к её массе, если частица в поле описала дугу окружности радиусом  $R = 4 \text{ см}$ . Определить по этому отношению, какая это частица.

24. Заряженная частица с энергией  $T = 1 \text{ кэВ}$  движется в однородном магнитном поле по окружности радиусом  $R = 1 \text{ мм}$ . Какова сила  $F$ , действующая на частицу со стороны поля?

25. Электрон в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$  движется по окружности. Найти величину эквивалентного кругового тока, создаваемого движением электрона.

26. Заряженная частица, обладающая скоростью  $v = 2 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ , влетела в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,52 \text{ Тл}$ . Найти отношение  $Q/m$  заряда частицы к ее массе, если в поле она описала дугу окружности радиусом  $R = 4 \text{ см}$ . По этому отношению определить, какова эта частица.

27. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 10^{-4} \text{ Тл}$  по винтовой линии. Чему равна скорость электрона, если шаг винтовой линии  $h = 20 \text{ см}$ , а радиус  $R = 5 \text{ см}$ ?

28. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 9 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$  по винтовой линии, радиус которой  $r = 1 \text{ см}$  и шаг  $h = 7,8 \text{ см}$ . Определить период обращения электрона и его скорость.

29. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 2 \text{ Тл}$  движется протон. Траектория его движения представляет

собой винтовую линию с радиусом  $R = 10 \text{ см}$  и шагом  $h = 60 \text{ см}$ . Определить кинетическую энергию  $T$  протона.

30. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов  $U = 104 \text{ В}$  и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ( $E = 10 \text{ кВ/м}$ ) и магнитное ( $B = 0,1 \text{ Тл}$ ) поля. Найти отношение заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

31. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,4 \text{ Тл}$  в плоскости, перпендикулярной силовым линиям поля, вращается стержень длиной  $l = 10 \text{ см}$ . Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определить разность потенциалов на концах стержня при частоте его вращения  $n = 16 \text{ об/с}$ .

32. В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,35 \text{ Тл}$  равномерно с частотой  $n = 480 \text{ об/мин}$  вращается рамка, содержащая  $N = 500$  витков площадью  $S = 50 \text{ см}^2$ . Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Определить максимальную ЭДС индукции, возникающую в рамке.

33. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества  $10^{-5} \text{ Кл}$ . Определить магнитный поток  $\Phi$  через кольцо, если сопротивление цепи гальванометра равно  $30 \text{ Ом}$ .

34. Рамка из провода сопротивлением  $0,01 \text{ Ом}$  равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией  $0,05 \text{ Тл}$ . Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки  $100 \text{ см}^2$ . Какое количество электричества протекает через рамку за время поворота ее на угол  $30^\circ$  в следующих трех случаях: 1) от 0 до  $30^\circ$ ; 2) от  $30^\circ$  до  $60^\circ$ ; 3) от  $60^\circ$  до  $90^\circ$ ?

35. Тонкий медный проводник массой  $1 \text{ г}$  согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле ( $B = 0,1 \text{ Тл}$ ) так, что плоскость его

перпендикулярна линиям индукции поля. Определить количество электричества  $q$ , которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины вытянуть в линию.

36. На расстоянии  $a = 1 \text{ м}$  от длинного прямого проводника с током  $I = 10^3 \text{ А}$  расположено кольцо радиусом  $r = 1 \text{ см}$ . Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий кольцо, максимален. Чему равно количество электричества, которое протечет по кольцу, если ток в проводнике будет выключен. Сопротивление кольца  $R = 10 \text{ Ом}$ .

37. Соленоид содержит 1000 витков. Сечение сердечника равно  $10 \text{ см}^2$ . По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией  $B = 1,5 \text{ Тл}$ . Найти среднее значение ЭДС, которая возникнет в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время, равное  $5 \cdot 10^4 \text{ с}$ .

38. Проволочное кольцо радиусом  $r = 10 \text{ см}$  лежит на столе. Какое количество электричества протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление  $R$  кольца равно  $1 \text{ Ом}$ . Вертикальная составляющая индукции  $B$  магнитного поля Земли равна  $50 \text{ мкТл}$ .

39. По длинному прямому проводу течет ток. Вблизи провода расположена квадратная рамка из тонкого провода сопротивлением  $R = 0,02 \text{ Ом}$ . Провод лежит в плоскость рамки и параллелен двум ее сторонам, расстояния до которых от провода соответственно равны  $a_1 = 10 \text{ см}$ ,  $a_2 = 20 \text{ см}$ . Найти силу тока в проводе, если при его включении через рамку протекло количество электричества  $q = 693 \text{ мкКл}$ .

40. Прямой проводник длиной  $10 \text{ см}$  помещен в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 1 \text{ Тл}$ . Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи  $0,4 \text{ Ом}$ . Какая мощность потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям индукции со скоростью  $20 \text{ м/с}$ ?

41. Соленоид сечением  $5 \text{ см}^2$  содержит 1200 витков. Индукция магнитного поля внутри соленоида при токе, равном

- 2 А, составляет 0,01 Тл. Определить индуктивность соленоида.
42. Источник тока замкнули на катушку с сопротивлением 10 Ом и индуктивностью 1 Гн. Через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,9 предельного значения?
43. Цепь состоит из катушки индуктивностью 1 Гн и сопротивлением 10 Ом. Источник тока можно отключить, не разрывая цепи. Определить время, за которое сила тока уменьшится до 0,001 первоначального значения.
44. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 Ом была подключена катушка, индуктивность которой 0,5 Гн, а сопротивление 8 Ом. Найти время, в течение которого ток в катушке, нарастая, достигнет значения, отличающегося от максимального на 1 %.
45. Соленоид содержит 1000 витков. Сила тока в обмотке соленоида 1 А, магнитный поток  $\Phi = 0,01$  Вб. Вычислить энергию магнитного поля.
46. Написать уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой 0,1 м, периодом 4 с и начальной фазой, равной  $\pi/2$ . Найти максимальную скорость колеблющейся точки и ее максимальное ускорение.
47. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой  $A = 4$  см и периодом  $T = 2$  с. Написать уравнение колебаний, если движение точки начинается из положения  $x_0 = 2$  см.
48. Определить начальную фазу колебаний тела, если через 0,25 с от начала движения смещение было равно половине амплитуды. Период колебаний 6 с.
49. Колебания материальной точки совершаются по закону  $x = 0,03 \sin \pi(t + 0,5)$  м. Определить наибольшие значения скорости и ускорения. Чему равна фаза колебаний спустя 5 с после начала движения?
50. Написать уравнение гармонического колебательного движения, если максимальное ускорение точки равно  $0,493$  м/с<sup>2</sup>, период колебаний 2 с и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени 0,025 см.

51. Точка совершает гармонические колебания. Период колебания  $T = 2\text{ с}$ , амплитуда  $A = 5\text{ см}$ , начальная фаза равна нулю. Найти скорость точки в момент времени, когда ее смещение от положения равновесия равно  $2,5\text{ см}$ .

52. Через сколько времени от начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний  $T = 24\text{ с}$ , начальная фаза равна нулю.

53. Груз, свободно колеблющийся на пружине, за время  $t = 0,01\text{ с}$  сместился с расстояния  $0,5\text{ см}$  от положения равновесия до наибольшего, равного  $1\text{ см}$ . Каков период его колебаний?

54. Найти зависимость скорости гармонического колебания материальной точки от смещения.

55. Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

56. Материальная точка участвует сразу в двух колебаниях, происходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями  $x_1 = \sin t\text{ см}$  и  $x_2 = \cos t\text{ см}$ . Найти амплитуду  $A$  результирующего колебания, его частоту  $\nu$  и начальную фазу  $\varphi$ . Написать уравнение движения.

57. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, возникающего при сложении двух колебаний одного направления

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \text{ и } x_2 = A_2 \sin \omega(t + \tau),$$

где  $A_1 = A_2 = 1\text{ см}$ ;  $\omega = \pi\text{ с}^{-1}$ ,  $\tau = 0,5\text{ с}$ .

Построить векторную диаграмму сложения амплитуд. Найти уравнение результирующего колебания.

58. Складываются два взаимно перпендикулярных колебания, выражаемых уравнениями

$$x = A_1 \sin \omega t \text{ и } y = A_2 \cos \omega(t + \tau),$$

где  $A_1 = 2\text{ см}$ ,  $A_2 = 1\text{ см}$ ;  $\omega = \pi\text{ с}^{-1}$ ;  $\tau = 0,5\text{ с}$ .

Найти уравнение траектории и построить ее, показав направление движения точки.

59. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями

$$x = 4\cos\pi t \text{ см} \text{ и } y = 8\cos\pi(t+1) \text{ см.}$$

Найти уравнение траектории и построить график ее движения.

60. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз складываемых колебаний.

61. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями

$$x_1 = 4\sin\pi t \text{ см} \text{ и } x_2 = 3\sin(\pi t + \pi/2) \text{ см.}$$

Написать уравнение результирующего колебания. Нарисовать векторную диаграмму сложения амплитуд.

62. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями

$$x_1 = 0.02\sin(5\pi t + \pi/2) \text{ м} \text{ и } x_2 = 0.03\sin(5\pi t + \pi/4) \text{ м.}$$

63. Написать уравнение результирующего колебания, получающегося в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой  $\nu = 5 \text{ Гц}$  и с одинаковой начальной фазой  $\varphi = \pi/3$ . Амплитуды колебаний равны  $A_1 = 0.10 \text{ м}$  и  $A_2 = 0.05 \text{ м}$ .

64. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = \cos\pi t$  и  $y = \cos\pi t/2$ . Найти траекторию результирующего движения точки.

65. Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковым периодом  $T = 8 \text{ с}$  и одинаковой амплитудой  $A = 0.02 \text{ м}$ . Разность фаз между этими колебаниями  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/4$ . Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.



66. Амплитуда затухающих колебаний маятника за время  $t_1 = 5$  мин уменьшилась в 2 раза. За какое время  $t_2$ , считая от начального момента, амплитуда уменьшится в 8 раз?

67. Амплитуда колебаний маятника длиной  $l = 1$  м за время  $t = 10$  мин уменьшилась в 2 раза. Определить логарифмический декремент колебаний  $\lambda$ .

68. Логарифмический декремент колебаний  $\lambda$  маятника равен 0,003. Определить число  $N$  полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

69. Гиря массой  $m = 500$  г подвешена к спиральной пружине жесткостью  $k = 20$  Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент колебаний  $\lambda = 0,004$ . Определить число  $N$  полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. За какое время  $t$  произойдет это уменьшение?

70. Математический маятник длиной в 24,7 см совершает затухающие колебания. Через сколько времени энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза, если логарифмический декремент затухания  $\lambda = 0,01$ ?

71. Найти число  $N$  полных колебаний системы, в течение которых энергия системы уменьшилась в два раза. Логарифмический декремент колебаний  $\lambda = 0,01$ .

72. За время, в течение которого система совершает  $N = 100$  колебаний, амплитуда уменьшается в 5 раз. Найти добротность системы.

73. Период  $T_0$  собственных колебаний пружинного маятника равен 0,55 с. В вязкой среде период  $T$  того же маятника стал 0,56 с. Определить резонансную частоту  $\nu_{рез}$  колебаний.

74. Тело совершает вынужденные колебания в среде с коэффициентом сопротивления  $r = 10^{-3}$  кг/с. Считая затухание малым, определить амплитудное значение вынуждающей силы, если резонансная амплитуда  $A_{рез} = 0,5$  см, а частота

собственных колебаний  $\nu = 10 \text{ Гц}$ .

75. Уравнение изменения силы тока в колебательном контуре со временем дается в виде  $I = -0,02 \sin 400\pi t$ . Индуктивность контура  $1,0 \text{ Гн}$ . Найти: 1) период колебаний, 2) ёмкость контура, 3) максимальную разность потенциалов на обкладках конденсатора, 4) максимальную энергию магнитного поля, 5) максимальную энергию электрического поля.

76. Колебательный контур радиоприемника состоит из катушки с индуктивностью  $L = 1 \text{ Гн}$  и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться в пределах от  $9,7$  до  $92 \text{ нФ}$ . В каком диапазоне длин волн может принимать радиостанции этот приемник?

77. Определить индукцию магнитного поля внутри катушки идеального контура Томсона в момент времени  $t = 10^{-4} \pi/6 \text{ с}$ , если при  $t=0$  заряд на конденсаторе  $Q_1 = 10^{-5} \text{ Кл}$ , а сила тока  $I_1 = 0$ . Индуктивность катушки  $L = 10^{-3} \text{ Гн}$ , число витков на  $1 \text{ м}$  длины катушки  $n = 10^3 \text{ м}^{-1}$ , емкость конденсатора  $C = 10^{-5} \text{ Ф}$ . Среда вакуум.

78. Найти время, за которое амплитуда колебания тока в контуре с добротностью  $Q = 5000$  уменьшится в два раза, если частота колебаний  $\nu = 2,2 \text{ МГц}$ .

79. Ток в колебательном контуре зависит от времени как  $I = I_0 \sin \omega_0 t$ , где  $I_0 = 90 \text{ мА}$ ,  $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Ёмкость конденсатора  $C = 0,50 \text{ мкФ}$ . Найти индуктивность контура и напряжение на конденсаторе в момент  $t = 0$ .

80. Колебательный контур имеет емкость  $C = 10 \text{ мкФ}$ , индуктивность  $L = 25 \text{ мГн}$  и активное сопротивление  $R = 1 \text{ Ом}$ . Через сколько колебаний амплитуда тока в этом контуре уменьшится в  $e = 2,7$  раз?

81. Добротность колебательного контура  $Q = 5$ . Определить, на сколько процентов отличается частота  $\omega$  свободных колебаний контура от его собственной частоты  $\omega_0$ .

82. Собственная частота колебаний некоторого контура  $\nu_0 = 8 \text{ кГц}$ , добротность контура  $Q = 72$ . В контуре возбуждают

затухающие колебания. а) Найти закон убывания запасенной в контуре энергии  $W$  со временем  $t$ ; б) Какая часть первоначальной энергии  $W_0$  сохранится в контуре по истечении времени  $\tau = 1 \text{ мс}$ ?

83. Колебательный контур имеет емкость  $1,1 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$ , индуктивность  $5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$ . Логарифмический декремент затухания равен 0,005. За сколько времени потеряется вследствие затухания 99% энергии контура?

84. Колебательный контур содержит ёмкость  $C = 1,2 \text{ нФ}$  и катушку с индуктивностью  $L = 6 \text{ мкГн}$  и активным сопротивлением  $R = 0,5 \text{ Ом}$ . Какую среднюю мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нём незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе  $U_m = 10 \text{ В}$ ?

85. На пленку с показателем преломления  $n = 1,4$  под некоторым углом падает белый свет. Толщина пленки  $b = 2,8 \cdot 10^{-1} \text{ мм}$ . При каком наименьшем угле падения пленка будет казаться красной в проходящем свете?

86. Белый свет, падающий на мыльную пленку нормально ( $n = 1,33$ ) и отраженный от нее, дает в видимом спектре интерференционный максимум на волне длиной  $6300 \text{ \AA}$  и соседний минимум на волне  $4500 \text{ \AA}$ . Какова толщина пленки, если считать ее постоянной?

87. Две пластинки из стекла образуют воздушный клин с углом  $\varphi_1 = 20''$ . Свет падает нормально ( $\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ). Во сколько раз нужно увеличить угол клина, чтобы число темных интерференционных полос на единицу длины увеличилось в 1,3 раза. Наблюдение проводится в отраженном свете.

88. Свет с длиной волны  $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$  падает на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности клина  $\Delta x = 0,21 \text{ мм}$ . Найти угол между гранями клина.

89. Мыльная пленка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ( $\lambda = 5.46 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ) оказалось, что расстояние между полосами  $l = 20 \text{ мм}$ . Угол клина  $\varphi = 11''$ . Найти показатель преломления мыльной воды. Свет падает нормально.

90. На установку для получения колец Ньютона падает нормально монохроматический свет ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ). Определить толщину воздушного слоя там, где наблюдается пятое кольцо.

91. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны  $R = 12,5 \text{ м}$  прижата к стеклянной пластине. Диаметры десятого и пятнадцатого темных колец Ньютона в отраженном свете равны  $d_1 = 1 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 1,5 \text{ мм}$ . Определить длину волны света.

92. На щель шириной  $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$  падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ . Найти ширину изображений щели на экране, удаленном от щели на  $l = 1 \text{ м}$ . Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

93. На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Угол отклонения пучков света, соответствующих второй светлой дифракционной полосе, равен  $1^\circ$ . Скольким длинам волн падающего света равна ширина щели?

94. Чему равна постоянная дифракционной решетки, если для того, чтобы увидеть красную линию ( $\lambda = 7 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ) в спектре третьего порядка, зрительную трубу пришлось установить под углом  $\varphi = 48^\circ 36'$  к оси коллиматора? Какое число штрихов нанесено на  $1 \text{ см}$  длины этой решетки? Свет падает на решетку нормально.

95. Определить число штрихов на  $1 \text{ см}$  дифракционной решетки, если при нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  решетка дает первый максимум на расстоянии  $l = 3,3 \text{ см}$  от центрального. Расстояние от решетки до экрана  $L = 1,1 \text{ м}$ .

96. Какое наименьшее число штрихов должна содержать решетка, чтобы в спектре первого порядка можно было разделить две желтые линии натрия с длинами волн  $\lambda_1 = 5,89 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  и  $\lambda_2 = 5,896 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ ? Какова длина такой решетки, если постоянная решетки  $d = 10 \text{ мкм}$ ?

97. Свет с длиной волны  $\lambda = 5,35 \cdot 10^{-7} \text{ м}$  падает нормально на дифракционную решетку с периодом  $d = 3,5 \text{ мкм}$ , содержащую  $N=1000$  штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

98. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на экране две линии ртутной дуги ( $\lambda_1 = 577 \text{ нм}$  и  $\lambda_2 = 579 \text{ нм}$ ) в спектре первого порядка, полученные при помощи дифракционной решетки с периодом  $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ? Фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, равно  $0,6 \text{ м}$ .

99. Угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора равен  $30^\circ$ . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до  $60^\circ$ ?

100. Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор. Поляризатор поглощает и отражает  $12\%$  падающего на него света, анализатор –  $10\%$ . Оказалось, что интенсивность луча, вышедшего из анализатора, в  $10$  раз меньше интенсивности естественного света. Найти угол между плоскостями пропускания поляризатора и анализатора.

101. Два николя расположены так, что угол между их плоскостями пропускания равен  $30^\circ$ . Потери на поглощение составляют  $10\%$  в каждом никеле. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через оба николя?

102. Найти показатель преломления  $n$  стекла, если при отражении от него света отраженный луч будет полностью поляризован при угле преломления  $\beta = 30^\circ$ .

103. При переходе от температуры  $T_1$  к температуре  $T_2$  площадь под кривой  $r_{\lambda T}(\lambda)$  увеличилась в  $n$  раз. Как изменилась при этом длина волны, на которую приходится максимум испускательной способности?

104. В излучении абсолютно черного тела максимум энергии падает на длину волны 680 нм. Сколько энергии излучает  $1 \text{ см}^2$  этого тела за 1 с и какова потеря его массы за 1 с вследствие излучения?

105. Абсолютно черное тело имеет температуру  $T_1 = 2900 \text{ К}$ . В результате остывания тела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на 9 мкм. До какой температуры  $T_2$  охладилось тело?

106. Принимая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело и температура его поверхности равна 5800 К, вычислить: а) энергию, излучаемую с  $1 \text{ м}^2$  поверхности Солнца за время  $t = 1 \text{ мин}$ ; б) массу, теряемую Солнцем вследствие лучеиспускания за время  $t = 1 \text{ с}$ .

107. Волосок лампы накаливания, рассчитанной на напряжение 2 В, имеет длину 10 см и диаметр 0.03 мм. Полагая, что волосок излучает как абсолютно черное тело, определите температуру нити и длину волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения. Вследствие теплопроводности лампа рассеивает 8 % потребляемой мощности, удельное сопротивление материала волоска  $5.5 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$ .

108. Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке  $d = 0.3 \text{ мм}$ , длина спирали 5 см. При включении лампочки в сеть напряжением  $U = 127 \text{ В}$  через лампочку течет ток 0.31 А. Найти температуру спирали. Считать, что при установлении равновесия все выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетических светимостей вольфрама и абсолютно черного тела для данной температуры  $\kappa = 0.31$ .

109. На сколько градусов понизилась бы температура земного шара за столетие, если бы на Землю не поступала солнечная энергия? Радиус Земли принять равным  $6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$ , удельную теплоемкость принять равной  $200 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ , плотность  $5500 \text{ кг}/\text{м}^3$ , среднюю температуру 300 К. Коэффициент поглощения 0.8. За какое время температура

понижилась бы на  $27\text{ K}$ ?

110. Какую мощность надо подводить к зачерненному металлическому шарик радиусом  $2\text{ см}$ , чтобы поддерживать его температуру на  $27\text{ K}$  выше окружающей среды? Температура окружающей среды  $T = 293\text{ K}$ . Считать, что тепло теряется только вследствие излучения.

111. В электрической лампе вольфрамовый волосок диаметром  $d = 0.05\text{ мм}$  накаливается при работе лампы до  $T_1 = 2700\text{ K}$ . Через сколько времени после выключения тока температура волоска упадет до  $T_2 = 600\text{ K}$ ? При расчете принять, что волосок излучает, как серое тело, с коэффициентом поглощения  $0.3$ . Пренебречь всеми другими причинами потери теплоты.

112. Металлический шарик диаметром  $d$  поместили в откачанный сосуд с абсолютно черными стенками, поддерживаемыми при температуре  $T = 0\text{ K}$ . Начальная температура шарика  $T_0$ . Считая поверхность шарика абсолютно черной, найти температуру, которую будет иметь шарик спустя время  $t$ . Плотность вещества шарика  $\rho$ , удельная теплоемкость  $c$ .

113. Какую задерживающую разность потенциалов нужно приложить к фотоэлементу, чтобы прекратить эмиссию электронов, испускаемых под действием лучей с длиной волны  $\lambda = 260\text{ нм}$  с поверхности алюминия, если работа выхода  $A = 3.74\text{ эВ}$ ?

114. Красной границе фотоэффекта для никеля соответствует длина волны, равная  $248\text{ нм}$ . Найти длину световой волны, при которой величина задерживающего напряжения равна  $1.2\text{ В}$ .

115. Фотоны с энергией  $E = 4.9\text{ эВ}$  вырывают электроны из металла. Найти максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

116. При поочередном освещении поверхности металла светом с длинами волн  $0.35$  и  $0.54\text{ мкм}$  обнаружено, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в  $n = 2$  раза. Найти работу выхода  $c$

поверхности этого металла.

117. При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 310 \text{ нм}$  фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25% задерживающее напряжение оказывается меньше на 0.8 В. Определить по этим экспериментальным данным постоянную Планка.

118. Монохроматическое излучение с длиной волны, равной 500 нм, падает нормально на плоскую зеркальную поверхность и давит на нее с силой 10 нН. Определите число фотонов, ежесекундно падающих на эту поверхность.

119. Точечный источник света потребляет 100 Вт и равномерно испускает свет во все стороны. Длина волны испускаемого при этом света 589 нм. КПД источника 0.1 %. Вычислить число фотонов, выбрасываемых источником за 1 с.

120. Импульс лазерного излучения длительностью 0.13 с и энергией  $E = 10 \text{ Дж}$  сфокусирован в пятно диаметром  $d = 10 \text{ мкм}$  на поверхность с коэффициентом отражения  $\rho = 0.5$ . Найти среднее давление такого пучка света.

121. Параллельный пучок монохроматических лучей с длиной волны 0.5 мкм падает нормально на зачерненную поверхность и производит давление  $10^{-5} \text{ Па}$ . Определить концентрацию электронов в потоке и его интенсивность, т.е. число частиц, падающих на единичную поверхность в единицу времени.

122. Пучок энергии, излучаемый электрической лампой, равен 600 Вт. На расстоянии  $R = 1 \text{ м}$  от лампы перпендикулярно к падающим лучам расположено круглое плоское зеркало диаметром  $d = 2 \text{ см}$ . Принимая, что зеркало полностью отражает падающий на него свет, определить силу  $F$  светового давления на зеркальце.

123. Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии равно 2.4 нм. Вычислить угол рассеяния и величину энергии, переданной при этом электрону отдачи, если длина волны рентгеновских лучей до взаимодей-



ствия  $10 \text{ нм}$ .

124. Какая доля энергии фотона приходится при эффекте Комптона на электрон отдачи, если рассеяние фотона происходит на угол  $180^\circ$ . Энергия фотона до рассеяния равна  $0.255 \text{ МэВ}$ .

125. Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. При этом длины волн излучения, рассеянного под углами, равными  $60^\circ$  и  $120^\circ$ , отличаются друг от друга в  $n = 2$  раза. Считая, что рассеяние происходит на свободных электронах, найти длину волны падающего излучения.

126. Фотон с длиной волны, равной  $6.0 \text{ нм}$ , рассеялся под прямым углом на покоившемся свободно электроне. Найти частоту рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

127. Фотон с энергией  $0.46 \text{ МэВ}$  рассеялся под углом  $120^\circ$  на покоившемся свободном электроне. Определить относительное изменение частоты фотона.

128. Определить угол  $\theta$ , под которым был рассеян гаммаквант с энергией  $E = 1.02 \text{ МэВ}$  при эффекте Комптона, если кинетическая энергия электрона отдачи  $T = 0.51 \text{ МэВ}$ .

129. Найти энергию налетающего фотона, если известно, что при рассеянии под углом  $90^\circ$  на покоившемся свободном электроне последний приобрел энергию  $300 \text{ кэВ}$ .

130. Фотон с энергией, превышающей в  $n = 2$  раза энергию покоя электрона, испытал лобовое столкновение с покоившимся свободным электроном. Найти радиус кривизны траектории электрона отдачи в магнитном поле  $B = 0.12 \text{ Тл}$ . Предполагается, что электрон отдачи движется перпендикулярно к направлению поля.

131. Фотон с энергией  $E = 0.15 \text{ МэВ}$  рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего его длина волны изменилась на  $3.0 \text{ нм}$ . Найти угол, под которым вылетел комптоновский электрон.

132. Угол рассеяния фотона  $\theta = 90^\circ$ . Угол отдачи электрона  $\varphi = 30^\circ$ . Определить энергию падающего фотона.

133. Какую энергию необходимо сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 нм?

134. При увеличении энергии электрона на  $\Delta E = 200$  эВ его дебройлевская длина волны изменилась в  $n = 2$  раза. Найти первоначальную длину волны электрона.

135. Найти кинетическую энергию, при которой дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновой длине волны.

136. Электрон движется по окружности радиусом  $r = 0.5$  см в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 8$  мТл. Определить длину волны де Бройля электрона.

137. Какую дополнительную энергию необходимо сообщить электрону с импульсом  $15.0$  КэВ/С (С - скорость света), чтобы его длина волны стала равной 50 нм?

138. Скорость так называемых тепловых нейтронов, средняя кинетическая энергия которых близка к средней энергии атомов газа при комнатной температуре, равна 2.5 км/с. Найти длину волны де Бройля для таких нейтронов.

139. В телевизионной трубке проекционного типа электроны разгоняются до большой скорости  $V$ . Определить длину волны катодных лучей без учета и с учетом зависимости массы от скорости, если  $V = 10^6$  м/с.

140. Найти длину волны де Бройля для электрона, движущегося со скоростью равной 0.8 скорости света. Учесть зависимость массы от скорости.

141. Пучок электронов падает нормально на поверхность монокристалла никеля. В направлении, составляющем угол  $55^\circ$  с нормалью к поверхности, наблюдается максимум отражения четвертого порядка при скорости электронов  $V = 8 \cdot 10^6$  м/с. Пренебрегая преломлением электронных волн в кристалле, вычислите межплоскостное расстояние, соответствующее данному отражению.

142. Пучок летящих параллельно друг другу электронов, имеющих скорость  $V=1.0 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ , проходит через щель шириной  $b=0.1 \text{ мм}$ . Найти ширину  $\Delta x$  центрального дифракционного максимума, наблюдаемого на экране, отстоящем от щели на расстояние  $l = 10 \text{ см}$ .

143. Электрон с кинетической энергией  $T = 15 \text{ эВ}$  находится в металлической пылинке диаметром  $d = 1 \text{ мкм}$ . Оценить относительную неточность  $\Delta V/V$ , с которой может быть определена скорость электрона.

144. Во сколько раз дебройлевская длина волны частицы меньше неопределенности ее координаты, которая соответствует относительной неопределенности импульса в 1%?

145. Предполагая, что неопределенность координаты движущейся частицы равна дебройлевской длине волны, определить относительную неточность  $\Delta P/P$  импульса этой частицы.

146. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: а) в основном состоянии; б) в возбужденном. Время жизни атома в возбужденном состоянии равно  $10^{-8} \text{ с}$ .

147. Оценить наименьшие погрешности, с которыми можно определить скорость электрона и протона, локализованных в области размером  $1 \text{ мкм}$ .

148. Оценить неопределенность скорости электрона в атоме водорода, полагая размер атома  $1 \text{ нм}$ . Сравнить полученное значение со скоростью электрона на первой борновской орбите.

149. Приняв, что минимальная энергия  $E$  нуклона в ядре равна  $10 \text{ МэВ}$ , оценить, исходя из соотношения неопределенностей, линейные размеры ядра.

150. Используя соотношение неопределенностей, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома  $l \approx 0.1 \text{ нм}$ .

151. Электрон с кинетической энергией  $T = 10 \text{ эВ}$  локализован в области размером  $L = 1.0 \text{ мкм}$ . Оценить относительную неопределенность скорости электрона.

152. Чему равна предельная резкость спектральной линии с длиной волны  $\lambda=5000\text{Å}$ , допускаемая принципом неопределенностей, если считать, что средняя продолжительность возбужденного состояния атомов  $\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$ .

153. Вычислить удельную активность  $a$  кобальта  $Co^{60}$ .

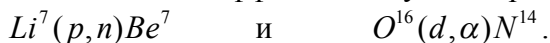
154. Определить массу изотопа  ${}_{53}I^{131}$ , имеющего активность  $A=37 \text{ ГБк}$ .

155. Во сколько раз уменьшится активность изотопа  ${}_{15}P^{32}$  через время  $t=20 \text{ сут}$ ?

156. Найти электрическую мощность атомной электростанции, расходующей  $0,1 \text{ кг } U^{235}$  в сутки, если к.п.д. станции 16%.

157. Активность  $A$  некоторого изотопа за время  $t=10 \text{ сут}$  уменьшилась на 20%. Определить период полураспада этого изотопа.

158. Определить тепловые эффекты следующих реакций:



159. Какая масса урана  $U^{235}$  расходуется за время  $t=1 \text{ сут}$  на атомной электростанции мощностью  $P=5000 \text{ кВт}$ ? К.п.д. принять равной 17%. Считать, что при каждом акте распада выделится энергия  $Q=200 \text{ МэВ}$ .

160. При бомбардировке изотопа лития  ${}_{3}Li^7$  протонами образуются две  $\alpha$  – частицы. Энергия каждой  $\alpha$  -частицы в момент их образования  $W_2=9.15 \text{ МэВ}$ . Какова энергия  $W_1$  бомбардирующих протонов?

161. При бомбардировке изотопа  ${}_{11}Na^{23}$  дейтонами образуется  $\beta$  – радиоактивный изотоп  ${}_{11}Na^{24}$ . Счётчик  $\beta$  - частиц находится вблизи препарата, содержащего радиоактивный  ${}_{11}Na^{24}$ . При первом измерении счётчик дал 170 отбросов за 1 мин., а через сутки - 56 отбросов за 1 мин. Написать уравнения обеих реакций. Найти период полураспада изотопа  ${}_{11}Na^{24}$ .

162. Определить суммарную кинетическую энергию ядер, образовавшихся в результате реакции  $C^{13}(d,\alpha)B^{11}$ , если кинетическая энергия дейтона равна 1,5 МэВ. Ядро-мишень  $C^{13}$  считать неподвижным.

## Варианты контрольных заданий

Таблица 9.1

Вариант	Номера заданий									
	1	1	11	31	56	66	85	103	123	133
2	2	12	32	57	67	86	104	124	134	154
3	3	13	33	58	68	87	105	125	135	155
4	4	14	34	59	69	88	106	126	136	156
5	5	15	35	60	70	89	107	127	137	157
6	6	16	36	61	71	90	108	128	144	158
7	7	17	37	62	72	91	109	129	145	159
8	8	18	38	63	78	92	110	130	147	160
9	9	19	39	64	82	93	111	131	149	161
10	10	20	40	65	83	94	112	132	152	162

Таблица 9.2

Вариант	Номера заданий									
	1	1	21	36	46	75	93	113	123	142
2	2	22	37	47	76	94	114	124	143	154
3	3	23	38	48	77	95	115	125	144	155
4	4	24	39	49	78	96	116	126	145	156
5	5	25	40	50	79	97	117	127	146	157
6	6	26	41	51	80	98	118	128	147	158
7	7	27	42	52	81	99	119	129	148	159
8	8	28	43	53	82	100	120	130	149	160
9	9	29	44	54	83	101	121	131	150	161
10	10	30	45	55	84	102	122	132	151	162

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, завершено конспективное изложение второй части курса общей физики, в котором представлены основы электродинамики, волновой и квантовой оптики, физики атома и ядра. Авторы считали главной своей задачей не только обратить внимание читателя на физический смысл рассматриваемых понятий и законов, но и научить применять их на практике. С этой целью после каждого из изучаемых разделов подробно рассматриваются методы решения типовых задач, что, по мнению авторов, должно оказать существенную помощь студентам в выполнении контрольных заданий.

Необходимо, однако, учитывать, что в пособии изложены всего лишь основы физической науки. Для получения более полной информации следует дополнительно обращаться к основным учебникам, список которых приводится ниже.

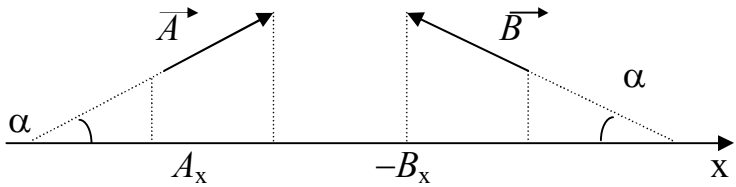
# ПРИЛОЖЕНИЯ

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### Элементы векторной алгебры

#### Проекция вектора на ось

$$A_x = |\vec{A}| \cos \alpha, \quad B_x = |\vec{B}| \cos \alpha.$$



#### Выражение вектора через проекции на координатные оси

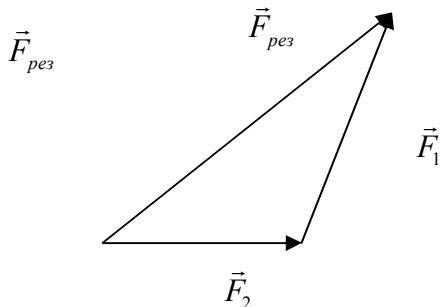
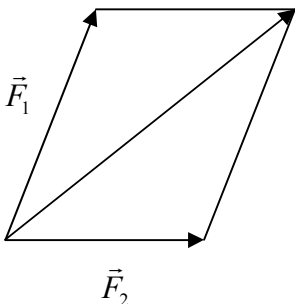
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k},$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы соответствующих координатных осей.

#### Сложение векторов

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

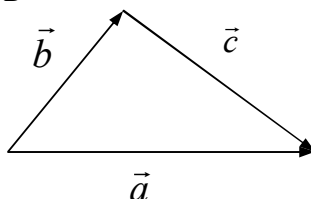
а) правило параллелограмма;      в) правило треугольника.





## Вычитание векторов

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



## Скалярное произведение двух векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

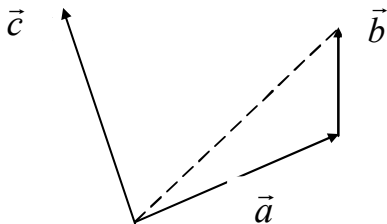
В декартовой системе координат

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

## Векторное произведение двух векторов

$$\vec{c} = [\vec{a} \cdot \vec{b}], \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ..



Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости в которой расположены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  причем, три вектора ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ) образуют правую тройку векторов (правило правого винта).

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Производная и дифференциал

**Производная от функции**  $y = f(x)$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

**Геометрический смысл производной** – она численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой  $y = f(x)$  в точке  $x$ . Если  $f'(x) > 0$ , то при увеличении  $x$  функция  $f(x)$  – возрастает, если  $f'(x) < 0$ , то при возрастании  $x$  функция  $f(x)$  – уменьшается.

### Таблица простейших производных

Функция	C	$x$	$x^n$	$e^x$	$a^x$	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
Производная	0	1	$nx^{n-1}$	$e^x$	$a^x \ln a$	$1/x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$

**Дифференциал функции**  $y = f(x)$

$$dy = y'(x) dx.$$

Полный дифференциал функции нескольких переменных  
 $U = f(x, y, z)$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz ,$$

где  $\frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial z}$  – частные производные.

### Правила вычисления дифференциалов

- 1)  $d(C u) = C du$  ( $C$ -const),
- 2)  $d(u \pm v) = du \pm dv$ ,
- 3)  $d(u v) = u dv + v du$ ,
- 4)  $d(u/v) = (v du - u dv) / v^2$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### Элементы интегрального исчисления

**Интегрирование** – действие обратное дифференцированию

$$\int df(x) = f(x).$$

**Неопределенный интеграл**

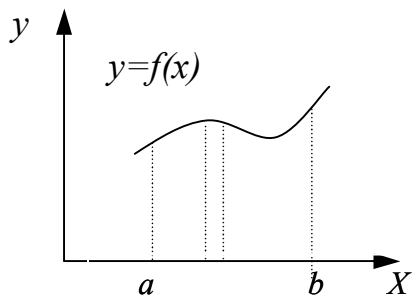
$$\int f(x) dx = F_x + C,$$

где  $F_x$  – первообразная функция ( $F'(x) = f(x)$ ),  $C$  – некоторая постоянная.

**Определенным интегралом** от функции  $y=f(x)$  – называется сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} f(x_i) \Delta x.$$

**Геометрический смысл определенного интеграла** – это число, равное площади под кривой  $y=f(x)$ , ограниченной ординатами:  $a$  – нижний,  $b$  – верхний пределы.



**Таблица интегралов**

<b>Интеграл</b>	$\int x^n dx$	$\int \frac{dx}{x}$	$\int \sin x dx$	$\int \cos x dx$	$\int tgx dx$	$\int ctgx dx$	$\int e^x dx$
<b>Первообразные</b>	$\frac{x^{n+1}}{n+1};$ $n \neq -1$	$\ln x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\ln \cos x$	$\ln \sin x$	$e^x$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8 \text{ м}$
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6 \text{ м}$
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22} \text{ кг}$
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ м}$
То же до центра Луны	$3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$
Период обращения Луны вокруг Земли	27,3 суток = $= 2,36 \cdot 10^6 \text{ с}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

### Основные физические постоянные

Нормальное ускорение свободного падения	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{К моль})$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Масса электрона	$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	$m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Удельный заряд электрона	$e/m = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Скорость света в вакууме	$C = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана - Больцмана	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}^4)$
Постоянные Вина	$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ $C = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \text{ К}^5)$
Постоянная Планка	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж с}$
Постоянная Ридберга	$R = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ $R = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$r = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_c = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i = 2,16 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Ядерный магнетон	$\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Основы физики: Ч. 1: Механика, молекулярная физика, электродинамика: учеб.пособие/ А.Г.Москаленко, М.Н. Гаршина, И.А. Сафонов. Воронеж: ВГТУ, 2008. 204 с.
2. Савельев И.В. Курс физики/И.В. Савельев М.: Наука, 1989. Т.1-3.
3. Детлаф А.А. Курс физики/ А. А. Детлаф, Б.М. Яворский М.:Высш. шк., 1989.
4. Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1975-1977.Т. 1-5.
5. Фейман. Лекции по физике/ Фейман М.: Мир, 1977. Вып. 1-10.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики/ Д.В. Сивухин. М.: Наука, 1977 - 1986. Т.1-5.
7. Дмитриева В.Ф. Основы физики/ В.Ф.Дмитриева, В.Л. Прокофьев М.: Высшая школа, 2001.
8. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма/ И.Е. Иродов. М.: Высш. шк., 1983.
9. Яворский Б.М. Справочник по физике/ Б.М.Яворский, А.А. Детлаф. М.: Наука, 1985.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ</b> .....	6
1.1 Магнитная индукция движущегося заряда. Взаимодействие движущихся зарядов. Сила Лоренца.....	6
1.2. Закон Био - Савара - Лапласа и его применение к расчёту магнитного поля прямого и кругового токов.....	8
1.3. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции для магнитного поля. Поле соленоида... ..	12
1.4. Проводник и контур с током в магнитном поле. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.....	16
1.5. Магнитное поле в веществе.....	20
1.5.1 Намагничивание вещества. Вектор намагничен- ности. Теорема Гаусса и теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ для магнитного поля в веществе.....	20
1.5.2. Магнитные моменты электрона и атома. Атом в магнитном поле.....	23
1.5.3. Диа -, пара - и ферромагнетики.....	26
1.6. Примеры решения задач по электромагнетизму.....	30
<b>2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ</b> .....	41
2.1. Законы электромагнитной индукции.....	41
2.2. Явление самоиндукции. Индуктивность соленоида.....	44
2.3. Расчёт токов при замыкании и размыкании цепей с индуктивностью.....	45
2.4. Взаимная индукция.....	47
2.5. Энергия магнитного поля.....	49
2.6. Примеры решения задач по законам электромагнитной индукции.....	50



<b>3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.....</b>	<b>54</b>
<b>4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.....</b>	<b>56</b>
4.1. Механические колебания и волны.....	56
4.1.1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний.....	56
4.1.2. Энергия гармонического колебания.....	57
4.1.3. Математический и физический маятники .....	58
4.1.4. Сложение гармонических колебаний одного направления. Биения .....	61
4.1.5. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу .....	64
4.1.6. Затухающие колебания и их характеристики.....	66
4.1.7. Вынужденные колебания. Резонанс.....	68
4.1.8. Распространение волн в упругих средах. Уравнение бегущей волны.....	70
4.1.9. Стоячие волны.....	73
4.2. Электромагнитные колебания и волны.....	75
4.2.1. Колебательный контур. Свободные электромагнитные колебания.....	75
4.2.2. Затухающие колебания и их характеристики.....	77
4.2.3. Вынужденные колебания в контуре. Резонанс.....	78
4.2.4. Электромагнитные волны.....	84
4.3. Примеры решения задач по колебаниям и волнам.....	86
<b>5. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.....</b>	<b>96</b>
5.1. Световая волна. Когерентность и монохроматичность световых волн .....	96
5.2. Интерференция света.....	98
5.2.1. Условия максимума и минимума интерференции.....	98
5.2.2. Способы получения когерентных световых волн.....	100

5.2.3. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников.....	101
5.2.4. Интерференция в тонких пленках.....	103
5.2.5. Полосы равной тощины. Кольца Ньютона.....	105
5.2.6. Применение интерференции.....	108
5.3. Дифракция света.....	110
5.3.1. Принцип Гюйгенса-Френеля.....	110
5.3.2. Прямолинейное распространение света. Метод зон Френеля.....	111
5.3.3. Дифракция Френеля на круглом отверстии.....	113
5.3.4. Дифракция Френеля на круглом диске.....	114
5.3.5. Дифракция плоской волны (дифракция Фраунгофера) на узкой щели.....	116
5.3.6. Дифракция Фраунгофера на решетке.....	118
5.3.7. Дифракция на пространственной (объёмной) решётке.....	122
5.4. Поляризация света.....	123
5.4.1. Естественный свет и различные типы поляризованного света.....	123
5.4.2. Поляризация при отражении и преломлении.....	125
5.4.3. Поляризация при двойном лучепреломлении.....	126
5.5. Примеры решения задач по волновой оптике.....	130
<b>6. КВАНТОВАЯ ОПТИКА</b> .....	142
6.1. Тепловое излучение. Закон Кирхгофа.....	143
6.2. Спектр и законы излучения абсолютно чёрного тела.....	145
6.3. Фотоэффект .....	148
6.4. Масса и импульс фотона. Давление света.....	152
6.5. Эффект Комптона.....	153
6.6. Примеры решения задач по квантовой оптике.....	154
<b>7. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ И ФИЗИКИ АТОМА</b> .....	160
7.1. Корпускулярно-волновой дуализм. Формула	

де Бройля.....	160
7.2. Соотношение неопределенностей.....	161
7.3. Уравнение Шредингера.....	162
7.4. Движение свободной частицы.....	164
7.5. Частица в потенциальной яме.....	165
7.6. Прохождение микрочастицы через потенциальный барьер.....	168
7.7. Атом водорода в квантовой механике.....	170
7.8. Спектр атома водорода.....	173
7.9. Многоэлектронные атомы. Рентгеновские спектры.....	175
7.10. Понятие о квантовых генераторах.....	179
7.11. Примеры решения задач по квантовой механике и физике атома.....	182
<b>8. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ЯДРА.....</b>	<b>187</b>
8.1. Основные свойства и строение ядра.....	187
8.2. Радиоактивность. Закон радиоактивного распада.....	189
8.3. Ядерные реакции.....	192
8.4. Примеры решения задач по ядерной физике.....	194
<b>9. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ.....</b>	<b>196</b>
<b>10. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ.....</b>	<b>199</b>
<b>Варианты контрольных заданий.....</b>	<b>221</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>222</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ.....</b>	<b>223</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>230</b>

Учебное издание

Москаленко Александр Георгиевич  
Гаршина Мария Николаевна  
Сафонов Игорь Александрович  
Тураева Татьяна Леонидовна  
Бугаков Александр Викторович

## КРАТКИЙ КУРС ФИЗИКИ

Часть 2

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ.  
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ОПТИКА.  
КВАНТОВАЯ ФИЗИКА.  
ФИЗИКА ЯДРА

В авторской редакции

Компьютерный набор И.А. Сафонова

Подписано в печать 13.10.2011.

Объём данных 7,2 МБ.

ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный технический  
университет»

394026 Воронеж, Московский просп., 14

