А.Г. Москаленко М.Н. Гаршина И.А. Сафонов
Т.Л. Тураева

Краткий курс физики для студентов заочной формы обучения

Часть 1

МЕХАНИКА.
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА.
ТЕРМОДИНАМИКА.

ВВЕДЕНИЕ

Физика принадлежит к числу фундаментальных наук, и без знания её основ невозможна успешная инженерная деятельность ни в одной области современной техники. Изучение физики позволяет также формировать интеллектуальные качества, необходимые специалисту для самостоятельной творческой работы. Однако освоение курса физики требует от студента – заочника огромных усилий, длительной и кропотливой работы с различными учебниками и пособиями. Для оказания помощи в изучении первой части курса физики и написано данное пособие, включающее основы механики, молекулярную физику и термодинамику.

Теоретический материал представлен в кратком изложении и доступной форме, основное внимание при этом обращается на физическую сущность основных понятий и законов. Наряду с теоретическими основами в пособии рассматриваются практические приёмы решения типовых задач.

Выписка из типовой программы дисциплины Физика за 2011 год (1 семестр)

Введение

Физика в системе естественных наук. Общая структура и задачи дисциплины «Физика». Экспериментальная и теоретическая физика. Физические величины, их измерение и оценка погрешностей. Системы единиц физических величин. Краткая история физических идей, концепций и открытий. Физика и научно-технический прогресс.

1. Механика.

Кинематика.

Основные кинематические характеристики криволинейного движения: скорость и ускорение. Нормальное и тангенциальное ускорение. Кинематика вращательного движения: угловая скорость и угловое ускорение, их связь с линейной скоростью и ускорением.

Динамика.

Инерциальные системы отсчета и первый закон Ньютона. Второй закон Ньютона. Масса, импульс, сила. Уравнение движения материальной точки. Третий закон Ньютона и закон сохранения импульса. Закон всемирного тяготения. Силы сопротивления.

Момент импульса. Момент импульса материальной точки и механической системы. Момент силы. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса механической системы.

Энергия. Сила, работа и потенциальная энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Работа и кинетическая энергия. Закон сохранения полной механической энергии в поле потенциальных сил.

Динамика вращательного движения.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения. Момент импульса тела. Момент инерции. Формула Штейнера. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела.

Элементы механики сплошных сред.

Общие свойства жидкостей и газов. Стационарное течение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли. Идеально упругое тело. Упругие напряжения и деформации. Закон Гука. Модуль Юнга. Коэффициент Пуассона.

Релятивистская механика.

Принцип относительности и преобразования Галилея. Экспериментальные обоснования специальной теории относительности. Постулаты специальной теории относительности

(СТО) Эйнштейна. Относительность одновременности и преобразования Лоренца. Сокращение длины и замедление времени в движущихся системах отсчета. Релятивистский импульс. Взаимосвязь массы и энергии. СТО и ядерная энергетика.

2. Термодинамика и статистическая физика.

Термодинамическое равновесие и температура. Первое начало термодинамики. Эмпирическая температурная шкала. Квазистатические процессы. Уравнение состояния в термодинамике. Обратимые и необратимые процессы. Первое начало термодинамики. Теплоемкость. Уравнение Майера. Изохорический, изобарический, изотермический, адиабатический процессы в идеальных газах. Преобразование теплоты в механическую работу. Цикл Карно и его коэффициент полезного действия. Энтропия.

Молекулярно-кинетическая теория.

Давление газа с точки зрения МКТ. Теплоемкость и число степеней свободы молекул газа. Распределение Максвелла для модуля и проекций скорости молекул идеального газа. Экспериментальное обоснование распределения Максвелла. Распределение Больцмана и барометрическая формула.

Элементы физической кинетики.

Явления переноса. Диффузия, теплопроводность, внутреннее трение. Броуновское движение.

Методические указания

Студенту заочнику рекомендуется:

1. Прослушать курс установочных лекций по физике. На основании полученных рекомендаций продолжить самостоятельное изучение теоретического материала, соответствующего рабочей программе по физике для данной специальности. В качестве основной литературы целесообразно использовать

один из рекомендуемых учебников (см. список литературы). В качестве дополнительного материала можно использовать теоретическое введение в настоящем пособии.

2. После изучения очередного раздела теории внимательно ознакомиться с примерами решения типовых задач, представленных в данном пособии. Решение задач помогает уяснить физический смысл явлений, закрепляет в памяти основные формулы, прививает навыки практического применения теоретических знаний. Типовые задачи в пособии подобраны так, что содержат элементы задач, предлагаемых для контрольных работ. Разбор их решения несомненно поможет при выполнении контрольного задания.

3. Решение контрольных задач должно сопровождаться исчерпывающими, но краткими объяснениями. Прежде всего необходимо сделать чертёж, поясняющий содержание задачи. Затем указать основные законы и формулы, на которых базируется решение задачи. Числовые значения подставляются только в окончательную формулу, выражающую искомую величину. При этом все вычисления следует проводить в системе СИ, руководствуясь правилом приближённых вычислений. Наконец, при записи ответа численные значения следует представить в стандартном виде, т.е. как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень при основании десять. Например, вместо 1350 надо записать $1{,}35\cdot10^3$, вместо 0, 0386 записать $3{,}86\cdot10^{-2}$ и т.д.

4. Студент должен решить контрольные задачи того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его зачетки (шифра). Контрольные работы выполняются в обычной школьной тетради, (каждую работу в отдельной тетради), на обложке которой приводятся сведения об исполнителе по следующему образцу:

Контрольная работа по физике №1
студента группы РК-001

шифр 257320
Иванова Петра Ивановича

Контрольные работы, представленные без соблюдения указанных правил, а также работы, выполненные не по своему варианту, зачитываться не будут.

Если контрольная работа не зачтена, студент обязан представить её на повторную рецензию, включив в неё те задачи, решение которых оказалось неверным. Зачтённые контрольные работы предъявляются экзаменатору. Студент должен быть готов дать во время экзамена пояснения по существу решения задач, входящих в его контрольные работы.

1. МЕХАНИКА

Механика изучает законы движения материальных объектов и те причины, которые вызывают или изменяют это движение. Основные законы механики установлены для физических моделей, к которым относятся материальная точка и абсолютно твердое тело. **Материальная точка –** это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. **Абсолютно твердое тело** – это тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко связанных между собой.

1.1. Кинематика материальной точки

Положение материальной точки в выбранной системе координат определяется **радиус-вектором** $\vec{r}$. Вектор $\vec{r}$ можно разложить на его составляющие по осям координат

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,, \qquad (1.1)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные вектора, направленные вдоль координатных осей; x, y, z – координаты точки (рис.1.1).

При движении материальной точки по произвольной траектории ее положение описывается векторным кинематическим уравнением движения

$$\vec{r} = f(t),$$

либо тремя скалярными кинематическими уравнениями

$$x = f(t),\ \ y = f(t),\ \ z = f(t).$$

Если за некоторый промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ точка переместилась из положения 1, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_1$, в положение 2, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_2$, то вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ называется **вектором перемещения** и характеризует изменение пространственного положения точки за данный промежуток времени. Длина траектории ΔS, заключенная между точками 1 и 2, представляет собой **путь**, пройденный за тот же промежуток времени Δt .

Для характеристики быстроты и направления движения материальной точки вводят понятие скорости. **Вектор средней скорости** представляет собой вектор перемещения за единицу времени

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.2)$$

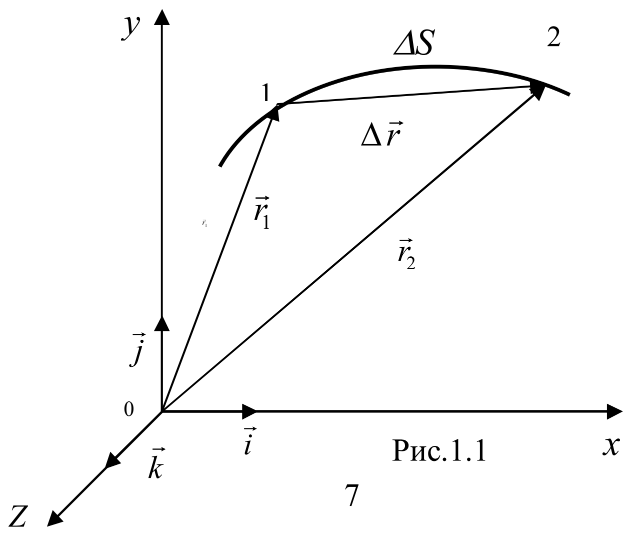


Рис.1.1

Вектор мгновенной скорости определяется первой производной радиус-вектора по времени

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\ . \qquad (1.3)$$

Направление вектора скорости совпадает с направлением касательной к траектории движения в данной точке.

Разложение вектора $\vec{\upsilon}$ в декартовой системе координат имеет вид:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}\ . \qquad (1.4)$$

При этом, проекции скорости точки на оси координат равны первым производным по времени от соответствующих координат

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}, \qquad (1.5)$$

а модуль вектора скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\ . \qquad (1.6)$$

Модуль вектора скорости может быть также определен через производную пути по времени

$$\upsilon = |\ \vec{\upsilon}\ | = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}\ . \qquad (1.7)$$

Если известен вид функции $\upsilon\ (t)$, то путь, пройденный точкой за определенный промежуток времени, определяется интегрированием

$$\mathrm{S} = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt\ . \qquad (1.8)$$

На графике зависимости скорости от времени $\upsilon = f\ (t)$ он выражается площадью заштрихованной фигуры (рис.1.2).

Быстроту изменения скорости материальной точки в пространстве характеризует **вектор ускорения:**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \qquad (1.9)$$

Ускорение, таким образом, есть первая производная вектора скорости по времени, или вторая производная радиус - вектора по времени.

Проекция ускорения на оси координат равны производным по времени от соответствующих проекций скорости или вторым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} \qquad (1.10)$$

В общем случае, направление вектора $\vec{a}$ составляет некоторый угол α с направлением скорости $\vec{\upsilon}$, поэтому вектор $\vec{a}$ можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис.1.3).

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \cdot \qquad (1.11)$$

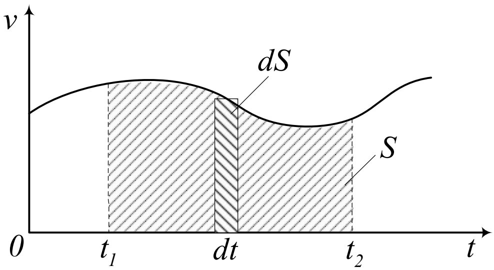


Рис.1.2

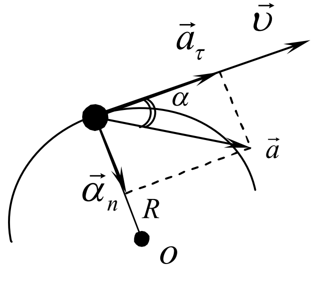


Рис.1.3

Вектор $\vec{a}_n$ совпадает с направлением нормали в данной точке траектории и называется нормальным (центростремительным) ускорением.

Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости только по направлению. Его величина равна

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\ , \qquad (1.12)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке.

Вектор $\vec{a}_\tau$ - тангенциальное (касательное) ускорение, характеризующее изменение скорости по величине. Значение тангенциального ускорения определяется выражением

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\,. \qquad (1.13)$$

Уравнения скорости и пути для прямолинейного равнопеременного движения (равноускоренного и равнозамедленного) в проекции на координатную ось имеют следующий вид:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t\ , \qquad (1.14)$$

$$S = \upsilon_{0x} t + {a_x t^2}/{2}\ . \qquad (1.15)$$

Приведём в качестве примера кинематические уравнения движения тела, брошенного под углом к горизонту (рис.1.4).

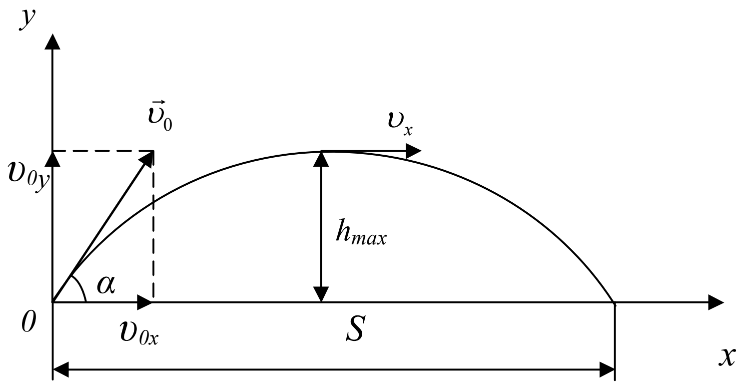


Рис.1.4

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha = const\ ;$$

$$\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\alpha - gt\ ;$$

$$x = \upsilon_x t = \upsilon_0 cos\alpha \cdot t\ ;$$

$$y = \upsilon_{0y} t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решение данной системы уравнений позволяет определить время полёта, максимальную высоту подъёма и дальность полёта:

$$t_{пол} = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g};$$

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g};$$

$$S = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

1.2.Кинематика поступательного и вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Поступательным движением абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, сохраняет неизменным направление в пространстве, т.е. перемещается параллельно самой себе (рис.1.5). По форме траектории поступательное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным.

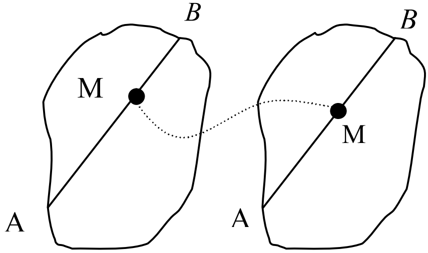


Рис.1.5

При поступательном движении все точки абсолютно твердого тела за один и тот же промежуток времени совершают одинаковые перемещения, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы. Поэтому, чтобы описать поступательное движение абсолютно твердого тела, достаточно определить движение одной из его точек M, например**,** центра масс.

При вращательном движении твердого тела все его точки движутся по окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис.1.6). При этом радиус-векторы, проведенные из центров соответствующих окружностей к точкам тела за равные промежутки времени, поворачиваются на один и тот же угол. Угол поворота $\Delta\varphi$ любого из радиус-векторов определяет **угловой путь**, пройденный телом за данный промежуток времени Δt. Очень малые углы поворота можно рассматривать как векторы $d\vec{\varphi}$, совпадающие с осью, направление которых связано с направлением вращения тела правилом правого винта. Такие векторы называются аксиальными.

Быстроту изменения углового перемещения с течением времени определяет **угловая скорость**

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} . \qquad (1.16)$$

Угловая скорость является аксиальным вектором, который направлен вдоль оси вращения в соответствии с правилом правого винта**.**

Быстроту изменения угловой скорости характеризует **вектор углового ускорения**

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} . \qquad (1.17)$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ либо совпадает с направлением угловой скорости (при ускоренном вращении $\frac{d\omega}{dt}>0$) либо противоположно ему (при замедленном вращении $\frac{d\omega}{dt}<0$).

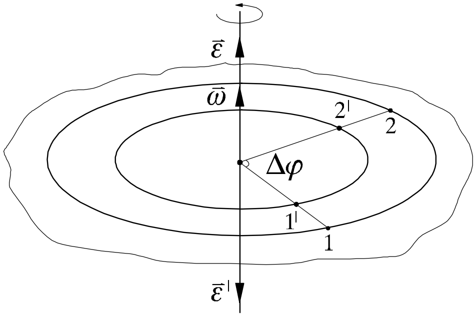


Рис.1.6

Угловой путь, угловая скорость и угловое ускорение при равноускоренном вращении связаны между собой формулами, аналогичными формулам равноускоренного прямолинейного движения

$$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t \,, \tag{1.18}$$

$$\varphi = \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z \mathrm{t}^2}{2}, \tag{1.19}$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Кроме угловых характеристик, движение каждой точки вращающегося тела характеризуют линейные величины υ, a, a_n, a_τ (рис.1.7).

Между угловыми и линейными характеристиками движения существуют следующие соотношения:

$$\upsilon = \omega R, \quad a_\tau = \varepsilon R, \; a_n = \omega^2 R = \frac{\upsilon^2}{\mathrm{R}}, \tag{1.20}$$

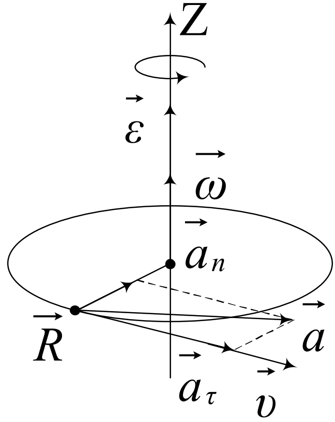


Рис.1.7

Примеры решения задач по кинематике

Пример 1. Движение частицы в плоскости *XУ* описывается кинематическими уравнениями: $x = At$; $y = At(1 - Bt)$, где A и B – константы. Определить: 1) уравнение траектории $y = f(x)$; 2) векторы скорости, ускорения и их численные значения; 3) вектор средней скорости за первые τ секунд движения и его модуль.

Решение

1) Для нахождения уравнения траектории движения частицы необходимо исключить параметр t из кинематических уравнений:

$$y = x - \frac{Bx^2}{A}.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение параболы.

2) Вектор скорости частицы в момент времени t определяется выражением:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j},$$

где $\vec{i}, \vec{j}$ - единичные векторы вдоль осей X и $У$, а υ_x и υ_y - проекции вектора скорости на соответствующие оси.

Дифференцируя уравнения $\begin{cases} x = At \\ y = At(1 - Bt) \end{cases}$ по времени, получим:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = A; \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = A - 2ABt$$

и, следовательно, $\vec{\upsilon} = A\vec{i} + (A - 2ABt)\vec{j}$.

Модуль вектора скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{{\upsilon_x}^2 + {\upsilon_y}^2} = A\sqrt{2(1 - 2Bt + 2B^2t^2)}.$$

Вектор ускорения представляет собой первую производную от вектора скорости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j},$$

где $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = 0, \qquad a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = -2AB.$

Следовательно, $\vec{a} = a_y \vec{j} = -2AB\vec{j}$.

Знак «-» в полученном выражении свидетельствует о том, что ускорение направлено в сторону, противоположную оси У.

Модуль ускорения равен

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 2AB.$$

3) Вектор средней скорости определяется выражением

$$< \vec{\upsilon} > = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j},$$

где $\Delta t = t - t_0 = \tau$, поскольку $t_0 = 0$, $\Delta x = x - x_0 = A\tau$;

$$\Delta y = y - y_0 = A\tau(1 - B\tau).$$

Окончательно,

$$< \vec{\upsilon} >= A\vec{i} + A\tau(1 - B\tau)\vec{j};$$

$$|< \vec{\upsilon} >| = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = A\sqrt{1 + (1 - B\tau)^2}\ .$$

Пример 2. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью υ = 30 *м/с*. Определить скорость, тангенциальное и нормальное ускорение камня в конце третьей секунды после начала движения.

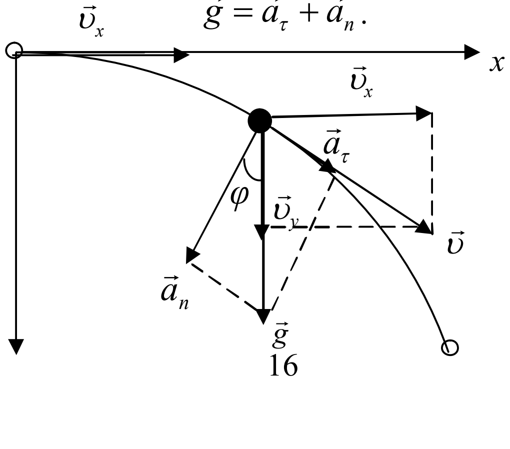
Решение

Движение горизонтально брошенного тела под действием силы тяжести состоит из равномерного движения в горизонтальном направлении со скоростью υ_x и свободного падения в вертикальном направлении со скоростью $\upsilon_y = gt$. Мгновенная скорость $\vec{\upsilon}(t)$ движения тела определяется сложением векторов $\vec{\upsilon}_x$ и $\vec{\upsilon}_y$. Модуль скорости $\upsilon(t)$ определим в соответствии с теоремой Пифагора

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + \upsilon_y^{\ 2}} = \sqrt{\upsilon_x^{\ 2} + g^2t^2}\ . \qquad (1)$$

Вектор полного ускорения тела $\vec{g}$ (ускорение свободного падения) равен векторной сумме тангенциального $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений.

$$\vec{g} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\ .$$



Как следует из рисунка, модуль нормального ускорения a_n тела равен: $a_n = g\cos\varphi$, где φ угол между векторами $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{\upsilon}_x$, следовательно $\cos\varphi = \upsilon_x / \upsilon$.

Тогда с учётом (1) получим

$$a_n = \frac{g\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{g\upsilon_x}{\sqrt{\upsilon_x^2 + g^2 t^2}} . \qquad (2)$$

Модуль тангенциального ускорения $a_\tau(t)$ определим в соответствии с теоремой Пифагора:

$$a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2\upsilon_x^2}{\upsilon_x^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{\upsilon_x^2 + g^2 t^2}} . \qquad (3)$$

Выполняя вычисления, получим

$$\upsilon = 42(м/с); \quad a_\tau = 7(м/с^2); \quad a_n = 7(м/с^2).$$

Пример 3. Маховик, вращающийся с постоянной частотой $n_0 = 10 об/с$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, частота вращения оказалась равной $n = 6 об/с$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ $об$.

Решение

При равнозамедленном вращательном движении уравнения угловой скорости и углового пути имеют вид:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t , \qquad (1)$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} . \qquad (2)$$

Решение этой системы уравнений дает соотношение, связывающее угловое ускорение с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2\varepsilon\varphi,$$

или

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0{}^2}{2\varphi}. \qquad (3)$$

Но так как $\varphi = 2\pi N$ и $\omega = 2\pi n$, то

$$\varepsilon = \frac{\pi(n^2 - n_0{}^2)}{N}. \qquad (4)$$

Подставив числовые значения в выражение (4), найдём

$$\varepsilon = -4{,}02\ рад/с^2.$$

Угловое ускорение получилось отрицательным, так как маховик вращался замедленно. Продолжительность торможения определяем из уравнения (1):

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}.$$

С учетом (4) окончательно получим

$$t = \frac{2\pi(n - n_0)N}{\pi(n^2 - n_0{}^2)} = \frac{2N}{n_0 + n}.$$

Подставив числовые значения, найдем: $t = 6{,}25 с$.

1.3. Динамика материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела

Основными динамическими характеристиками материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела являются масса и импульс.

Масса – скалярная величина, являющаяся мерой инертности тела. Под инертностью понимают свойство тела противиться изменению скорости под воздействием силы. В классической механике считается, что масса не зависит от скорости тела и является величиной аддитивной**,** т.е. масса системы равна сумме масс всех материальных точек, входящих в эту систему:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \ .$$

Центром масс, или центром инерции системы материальных точек называется точка С, радиус-вектор которой равен

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \,, \qquad (1.21)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - масса и радиус-вектор i -й материальной точки.

Скорость центра инерции

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i \ . \qquad (1.22)$$

Импульс (количество движения) **тела** – векторная физическая величина, являющаяся основной количественной мерой поступательного движения, равная произведению его массы на скорость

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon} \ . \qquad (1.23)$$

Импульс системы материальных точек равен геометрической (векторной) сумме импульсов всех точек системы и, следовательно, равен произведению массы системы на скорость ее центра инерции:

$$\vec{P}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = m\vec{\upsilon}_c \ . \qquad (1.24)$$

В основе динамики материальной точки и поступательного движения твердого тела лежат три закона Ньютона.

Согласно первому закону Ньютона (закон инерции) тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Тело, лишенное внешних воздействий, называется свободным, а его движение - инерциальным. Система отсчёта, связанная со свободным телом, называется инерциальной системой отсчёта.

Количественной мерой воздействия одного тела на другое является **импульс силы**, равный произведению силы на время ее действия $\vec{F}dt$. Поэтому, выражение $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i dt = 0$ является условием инерциального движения материальной точки.

Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса тела равно импульсу всех сил действующих на тело, т.е.

$$d\vec{P} = \vec{F}dt\,. \tag{1.25}$$

Другая форма записи второго закона Ньютона имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,,\ \text{или}\ \ m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,,\ \text{или}\ \ m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,, \tag{1.26}$$

где $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ - геометрическая сумма всех сил, действующих на тело.

Таким образом, выражения (1.25) и (1.26) представляют собой **основное уравнение динамики** материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела.

Любое действие тел друг на друга имеет характер взаимодействия. Об этом говорит третий закон Ньютона: две материальные точки действуют друг на друга с силами, которые численно равны и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки, т. е.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,,\ \left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right|. \tag{1.27}$$

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики определенной материальной точки, к динамике произвольной механической системы. Из третьего закона следует, что в любой механической системе векторная сумма всех внутренних сил равна нулю. Векторная же сумма всех внешних сил, действующих на систему, называется главным вектором внешних сил:

$$\vec{F}_{внеш} = \sum \vec{F}_{i\ внеш},$$

где $\vec{F}_{i\,внеш}$- результирующая внешних сил, приложенных к i-й материальной точке. Поэтому

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}_{внешн} \quad \text{или} \quad m\vec{a}_c = \vec{F}_{внеш}, \qquad (1.28)$$

где m – масса системы, $\vec{\upsilon}_{\text{с}}$ – скорость её центра инерции, $\vec{F}_{внеш} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ - главный вектор всех внешних сил.

Таким образом, центр инерции механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на которую действует сила, равная главному вектору внешних сил, приложенных к системе.

1.4. Динамика вращательного движения твердого тела

Основными динамическими характеристиками абсолютно твердого тела при вращательном движении являются момент инерции и момент импульса.

1.4.1. Момент инерции и момент импульса твердого тела

Моментом инерции тела относительно оси z является сумма произведений элементарных масс на квадраты расстояний от них до данной оси:

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \qquad (1.29)$$

где m_i и r_i - масса i-й точки и ее расстояние от оси.

Момент инерции есть мера инертности твердого тела к изменению его угловой скорости. Чем больше момент инерции, тем труднее изменить его угловую скорость. Следовательно, момент инерции тела при вращательном движении играет такую же роль, что и масса при поступательном движении.

Момент инерции тела является величиной аддитивной. Вычисление момента инерции тела производится по формулам

$$I_z = \int_0^m r^2 dm = \int_0^v \rho r^2 dV, \tag{1.30}$$

где dm и dV – масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси z, ρ – плотность тела в данной точке.

Моменты инерции некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно оси z, проходящей через центр массы тела, приведены в таблице.

Момент инерции I_x тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела I_c относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс C, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между этими осями (**теорема Штейнера**):

$$I_x = I_c + md^2. \tag{1.31}$$

Твердое тело	Ось	Момент инерции
Кольцо радиусом R	Совпадает с осью кольца	$I = m R^2$
Сплошной цилиндр радиусом R	Совпадает с осью цилиндра	$I = \frac{1}{2} m R^2$
Шар радиусом R	Проходит через центр шара	$I = \frac{2}{5} m R^2$
Тонкий стержень длиной l	Перпендикулярна стержню, проходит через его центр	$I = \frac{1}{12} m l^2$

Момент импульса является основной количественной мерой вращательного движения тела. Различают момент импульса тела относительно неподвижной точки (полюса) и относительно неподвижной оси.

Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется векторное произведение радиус - вектора $\vec{r}$, проведенного из полюса О в место нахождения материальной точки, на импульс $\vec{P}$ этой точки (рис. 1.8):

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{P}] = m\left[\vec{r}, \vec{\upsilon}\right], \qquad (1.32)$$

где m и $\vec{\upsilon}$ – масса и скорость материальной точки.

Вектор $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости в которой расположены векторы от $\vec{r}$ и $\vec{P}$, а его направление определяется правилом правого винта: при вращении рукоятки буравчика от $\vec{r}$ к $\vec{P}$, его поступательное движение совпадает с направлением $\vec{L}$ (рис. 1.8)

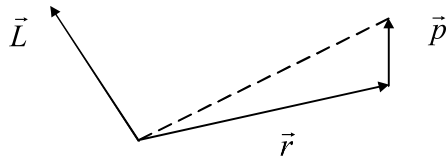


Рис.1.8

Модуль момента импульса равен:

$$L = rP\sin\alpha,$$

где α - угол между $\vec{r}$ и $\vec{P}$.

Моментом импульса системы относительно неподвижной точки О называется геометрическая сумма моментов импульса относительно той же точки О всех материальных точек системы

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \vec{P}_i\right], \qquad (1.33)$$

где $\vec{r}_i$, $\vec{P}_i$, - радиус-вектор и импульс i-й материальной точки, а n – общее число этих точек в системе.

Моментом импульса системы относительно неподвижной оси z называется величина L_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{L}$ момента импульса системы относительно какой либо точки О, принадлежащей этой оси:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \vec{P}_i \right]_z \quad . \qquad (1.34)$$

Выбор положения точки О на оси z не влияет на численное значение L_z. В частности, если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то его момент импульса относительно этой оси:

$$L_z = I_z\ \omega_z. \qquad (1.35)$$

Здесь I_z – момент инерции тела относительно оси z, а ω_z - проекция вектора $\vec{\omega}$ на ось z. Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость.

1.4.2. Момент силы. Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Момент силы характеризует ее вращательное действие. Различают момент силы относительно точки и относительно неподвижной оси.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно точки О называется векторная величина $\vec{M}$ равная векторному произведению радиус - вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку приложения силы, на вектор силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \qquad (1.36)$$

Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой расположены векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его направление определяется также правилом правого винта (рис.1.9).

Модуль момента силы равен

$$M = F\,r\,sin\alpha = F\,l, \tag{1.37}$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$, $l = r\ sin\alpha$ – плечо силы $\vec{F}$, определяемое длиной перпендикуляра, опущенного из точки О на линию действия силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы $\vec{F}$ относительно произвольной точки О, принадлежащей этой оси. Значение M_z не зависит от выбора положения точки О на оси Z (рис.1.10).

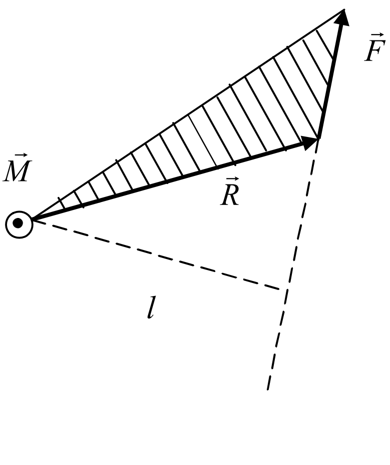


Рис. 1.9

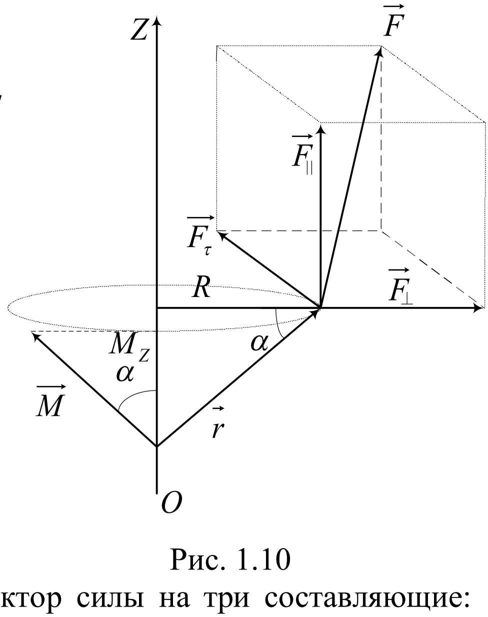


Рис. 1.10

Действительно, разложим вектор силы на три составляющие: $\vec{F}_{||}$ – параллельную оси z, $\vec{F}_R$ – перпендикулярную оси z, $\vec{F}_\tau$ – касательную к окружности радиуса R с центром на оси z.

Вращательное действие оказывает только составляющая $\vec{F}_\tau$, поэтому момент силы относительно оси будет равен

$$M_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z = r\, F_\tau \cos\, \alpha \ = R\, F_\tau\,. \qquad (1.38)$$

Скорость изменения момента импульса частицы со временем равна суммарному моменту сил, действующих на частицу:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad или \quad d\vec{L} = \vec{M}dt\;. \qquad (1.39)$$

Для твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси *Z*, скорость изменения момента импульса тела L_z определяется действием результирующего момента всех внешних сил, относительно данной оси, т.е.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\,внеш}\,, \qquad (1.40)$$

учитывая, что, $L_z = I_z\omega$ получим

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^{внеш}\,, \qquad (1.41)$$

или

$$I_z\varepsilon = M_z^{внеш}\,. \qquad (1.42)$$

Уравнения (1.40) - (1.42) представляют собой **уравнения динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси.

Из последней формулы видно, что чем больше момент инерции тела, тем меньшее угловое ускорение оно приобретает под действием одного и того же момента внешних сил.

В самом общем случае, движение свободного твердого тела удовлетворяет следующим двум дифференциальным уравнениям:

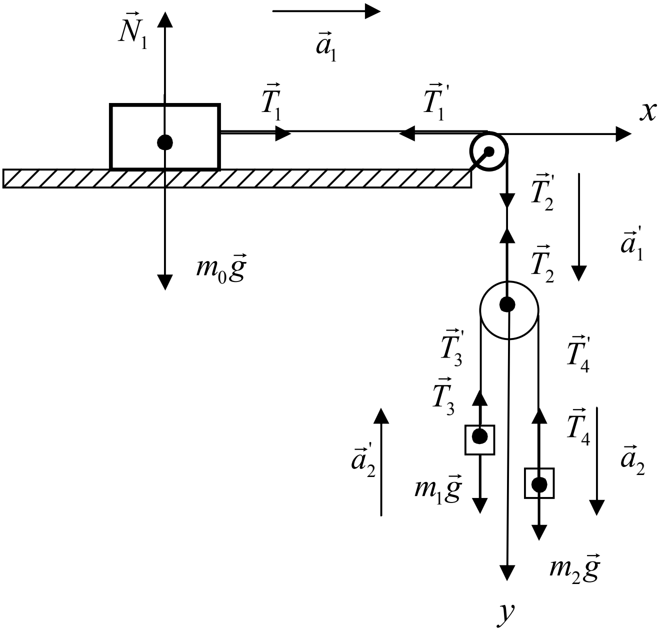
$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}^{\,внеш} \quad и \quad I_c\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_c^{\,внеш}\,.$$

Здесь m – масса тела, I_c – момент инерции тела относительно центра масс, $\vec{F}$ - главный вектор внешних сил, $\vec{M}_c^{внеш}$ - главный момент внешних сил относительно точки С.

Первое уравнение описывает поступательное движение свободного тела со скоростью его центра масс. Второе уравнение описывает вращение твердого тела вокруг его центра масс.

Примеры решения задач по динамике поступательного и вращательного движения тел

Пример 1. В системе, показанной на рисунке, массы тел равны m_0; m_1 *и* m_2, трения нет, массы блоков пренебрежимо малы. Найти ускорение тела массой m_0 относительно стола и ускорения грузов m_1 и m_2 относительно подвижного блока.



Решение

Укажем все силы, действующие на грузы. Если считать нити, связывающие грузы, невесомыми и нерастяжимыми, а также пренебречь массой блоков, то силы натяжения нити с обеих сторон от каждого блока равны, в частности, $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1^{'}\right| = \left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2^{'}\right| = T$, $\left|T_3\right| = \left|T_3^{'}\right| = \left|T_4\right| = \left|T_4^{'}\right| = T_3$. Выберем положительные направления координатных осей x и y, запишем в скалярном виде уравнения движения груза m_0 и системы грузов m_1 *и* m_2 в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$T = m_0 a_1 ; \tag{1}$$

$$-T + m_1 g + m_2 g = (m_1 + m_2) a_1 . \tag{2}$$

Выразим из уравнения (2) силу T, получим

$$T = (m_1 + m_2) g - (m_1 + m_2) a_1 . \tag{3}$$

Приравняв правые части выражений (1) и (3), найдём

$$m_0 a_1 = (m_1 + m_2) g - (m_0 + m_2) a_1 .$$

Откуда

$$a_1 = \frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 + m_2 + m_0} . \tag{4}$$

Запишем уравнения движения грузов m_1 и m_2 в проекциях на ось oy:

$$m_1 g - T_3 = m_1 (a_1 - a_2),$$

$$m_2 g - T_3 = m_2 (a_1 + a_2).$$

Решая систему уравнений с учётом (4), получим

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1) m_0 g}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_0)} .$$

Пример 2. Моторная лодка массой m = 400 *кг* начинает двигаться по озеру. Сила тяги мотора F= 0,2 *кН.* Считая силу сопротивления пропорциональной скорости, определить скорость лодки через t = 20*с* после начала её движения. Коэффициент сопротивления κ = 20 *кг/с*.

Решение

На лодку в горизонтальном направлении действуют две силы: сила тяги мотора и сила сопротивления, величина которой пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F}_c = -k\vec{\upsilon}$. Уравнение движения лодки имеет вид:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F - \kappa\upsilon .$$

Для решения данного дифференциального уравнения разделим переменные

$$\frac{d\upsilon}{F - \kappa\upsilon} = \frac{1}{m}dt$$

и выполним интегрирование:

$$\int_0^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{F - \kappa\upsilon} = \frac{1}{m}\int_0^{\Delta t}dt \Rightarrow -\frac{1}{\kappa}\ln(F - \kappa\upsilon)\Big|_0^{\upsilon} = \frac{\Delta t}{m} .$$

Подставив пределы интегрирования, проведём преобразование

$$\ln\frac{F - \kappa\upsilon}{F} = -\frac{\kappa}{m}\Delta t$$

или

$$\frac{F - \kappa\upsilon}{F} = e^{-\frac{\kappa}{m}\Delta t} .$$

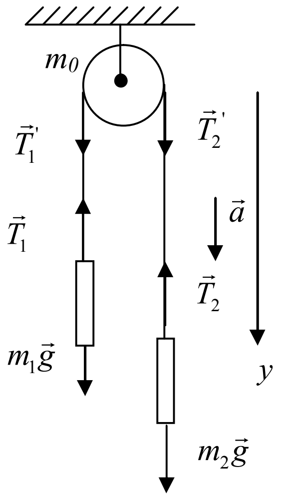
Окончательно получим

$$\upsilon = \frac{F}{\kappa}(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}\Delta t)}) .$$

Произведя вычисления, найдем υ = 6.3 *м*/с.

Пример 3. Через блок в виде диска массой m_0 перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Найти ускорение грузов. Трением пренебречь.

Решение



Применим к решению задачи основные законы динамики поступательного и вращательного движения. С этой целью, покажем силы, действующие на тела данной системы, напишем уравнения движения для каждого из тел в отдельности.

На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$ (см. рис.).

Уравнения движения этих тел в проекции на ось y имеют вид

$$-m_1 a = m_1 g - T_1 , \qquad (1)$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2 . \qquad (2)$$

Вращение блока вызывается действием сил натяжения нити, поскольку моменты сил тяжести блока и реакции оси равны нулю. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения для блока имеет вид

$$I\varepsilon = R(T_2 - T_1), \qquad (3)$$

где R - радиус блока, $I = m_0 R^2 / 2$ - его момент инерции, ε - угловое ускорение.

Учтено также, что по третьему закону Ньютона силы натяжения нити с каждой из сторон блока одинаковы по модулю, т.е.

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1'\right| \;\; и \;\; \left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right|.$$

Если нить не проскальзывает относительно блока, то касательное ускорение его точек, соприкасающихся с нитью, равно ускорению нити в любой её точке, а следовательно

$$a = \varepsilon R.$$

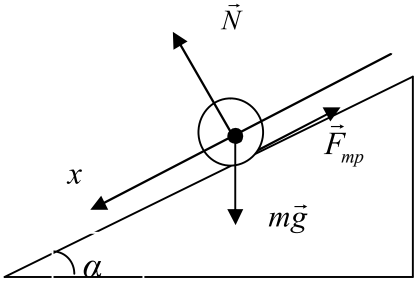
Решение системы полученных уравнений дает искомый результат

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{m_0}{2}} g.$$

Пример 4. Однородный шар скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. Найдите ускорение центра инерции шара.

Решение

На шар действует сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Последняя является силой трения покоя, которая и создает вращающий момент относительно мгновенной оси, проходящей через центр инерции. Под действием этих сил шар участвует в двух движениях (поступательном и вращательном), уравнения которых имеют следующий вид



$$ma = mg\sin\alpha - F_{тр}, \quad (1)$$

$$I\varepsilon = RF_{тр}, \quad (2)$$

где a – ускорение центра масс шара, I - момент инерции шара относительно его центра масс, ε - угловое ускорение.

Учитывая, что $I = \frac{2}{5}mR^2$, $\upsilon = \omega R$ и $a = \varepsilon R$, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{2}{5}mR^2\frac{a}{R} = RF_{тр} \Rightarrow \frac{2}{5}ma = F_{тр}. \quad (3)$$

Решая уравнения (1) и (3) совместно, получим

$$a = \frac{5}{7} g \sin\alpha \ . \qquad (4)$$

1.5. Механическая энергия, работа и мощность

Энергией называется скалярная физическая величина, являющаяся единой мерой различных форм движения и типов взаимодействия материальных объектов. Механическая энергия зависит от относительного расположения взаимодействующих тел и скорости их движения. Изменение механической энергии тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Для количественного описания процесса обмена энергией между взаимодействующими телами в механике вводят понятие работы.

1.5.1 Механическая работа и мощность при поступательном движении

Элементарная работа силы $\vec{F}$, на малом перемещении $d\vec{r}$, определяется скалярным произведением

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = FdS\,cos\alpha = F_\tau dS \ , \qquad (1.43)$$

где $dS = |d\vec{r}|$, $F_\tau = Fcos\alpha$ - проекция силы на направление перемещения $d\vec{r}$, α - угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$.

Выражение (1.43) можно представить в проекциях на координатные оси:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \ , \qquad (1.44)$$

Работа, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном участке траектории точки ее приложения, равна алгебраической сумме работ на всех малых частях этого участка, т.е. выражается криволинейным интегралом

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \ . \qquad (1.45)$$

Для вычисления этого интеграла необходимо знать зависимость F_τ от S вдоль данной траектории L. Если эта зависимость представляется графически (рис.1.11), то работа измеряется заштрихованной на данном рисунке площадью.

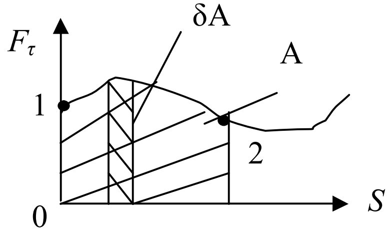


Рис.1.11

Силы, совершающие работу, принято подразделять на консервативные (потенциальные) и неконсервативные (диссипативные). Силы являются консервативными, если их работа не зависит от пути, по которому тело переходит из одного положения в другое, а полностью определяется начальным и конечным положением тела. Соответственно, работа консервативных сил вдоль любой замкнутой траектории L равна нулю, т.е.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0 . \qquad (1.46)$$

Все силы, не удовлетворяющие этому условию, называют неконсервативными. К числу неконсервативных сил относятся, например, силы трения и сопротивления.

Для характеристики работы, совершаемой за единицу времени, в механике пользуются понятием мощности.

Мощностью называется скалярная физическая величина, равная отношению элементарной работы dA к тому промежутку времени dt, в течение которого эта работа совершается

$$N = \frac{dA}{dt} . \qquad (1.47)$$

При поступательном движении твердого тела

$$N = \frac{(\vec{F}, d\vec{r})}{dt} = (\vec{F}, \vec{\upsilon}) = F_\tau \upsilon \,. \qquad (1.48)$$

1.5.2. Кинетическая и потенциальная энергия

В классической физике полную механическую энергию системы можно представить в виде двух слагаемых

$$E = T + U \,. \qquad (1.49)$$

Часть механической энергии *T,* зависящая от скорости движения тел в пространстве, называется кинетической энергией. Другая часть механической энергии *U,* зависящая от взаимного расположения тел т.е. от конфигурации системы, называется потенциальной энергией.

В классической механике выражение для кинетической энергии материальной точки и поступательного движения абсолютно твердого тела имеет вид

$$T = m\,\upsilon^2/2 \,. \qquad (1.50)$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, то его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, на которые это тело можно мысленно разбить

$$T = \sum \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} \,.$$

Поскольку линейная скорость i- й точки $\upsilon_i = \omega\, r_i$, где r_i – расстояние от этой точки до оси вращения, а ω - угловая скорость тела, то

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{I_z \omega^2}{2} \,. \qquad (1.51)$$

В данной формуле I_z есть момент инерции тела относительно оси вращения. Следовательно, кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется по аналогии с кинетической энергией поступательного движения, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая.

В общем случае движение твердого тела можно представить в виде двух движений – поступательного со скоростью, равной скорости движения центра масс тела υ_c, и вращения с угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, проходящей через центр масс. При этом полная кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} , \qquad (1.52)$$

где I_c – момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр масс; υ_c – скорость центра масс.

Для получения однозначной зависимости потенциальной энергии системы от ее конфигурации $U(x, y, z)$, необходимо выбрать, так называемую, нулевую конфигурацию (нулевой уровень), в котором потенциальную энергию системы условно считают равной нулю. Потенциальная энергия системы в произвольном состоянии равна работе, совершаемой всеми действующими на систему консервативными силами при переводе системы из рассматриваемого состояния в состояние соответствующее нулевой конфигурации. Таким образом, убыль потенциальной энергии равна работе консервативных сил

$$dA = - dU \;\; \textit{или} \;\; A_{12} = - \Delta U . \qquad (1.53)$$

Формула (1.53) дает возможность найти выражение потенциальной энергии U для любого стационарного поля консервативных сил. Для этого достаточно вычислить работу, совершаемую консервативными силами поля между двумя состояниями, и представить ее в виде убыли потенциальной энергии. Конкретный вид функции $U(x,y,z)$ зависит от характера силового взаимодействия. Так, потенциальная энергия в поле силы тяжести равна $U = mgh$, а потенциальная энергия упруго деформированного тела (например, пружины) равна $U = kx^2/2$, где k – коэффициент упругости, а x – абсолютная деформация.

Зная вид функции $U(x,y,z)$ можно найти силу, действующую на частицу в каждой точке поля,

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\vec{\nabla}U \ , \qquad (1.54)$$

где $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ – частные производные от функции $U(x,y,z)$,

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – оператор набла.

Выражение $\vec{\nabla}U$ читается как «градиент U». Таким образом, консервативная сила, действующая на частицу, равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком.

1.5.3. Работа и мощность при вращательном движении

Изменение кинетической энергии механической системы равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на эту систему

$$dT = dA_{внеш} + dA_{внутр} \ . \qquad (1.55)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси элементарная работа всех внешних сил, действующих на твердое тело, равна приращению только кинетической энергии, так как его потенциальная энергия при этом не меняется. Следовательно

$$dA = dT = d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right) = I_Z\omega d\omega \ .$$

С учетом того, что $I_z\, d\omega = M_z\, dt$, получим

$$dA = M_z\, \omega\, dt = M_z\, d\varphi \ . \qquad (1.56)$$

Полная работа внешних сил при повороте твердого тела на некий угол φ равна:

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi \quad . \tag{1.57}$$

В случае, если $M_z=const,$ то последнее выражение упрощается:

$$A = M_z \varphi \, . \tag{1.58}$$

Таким образом**,** работа внешних сил при вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси определяется действием момента M_z этих сил относительно данной оси.

При вращательном движении твердого тела относительно неподвижной оси мощность определяется выражением

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega \, . \tag{1.59}$$

Примеры решения задач на работу и мощность

Пример 1. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)$, где a – константа. Найти: а) силу $\vec{F}$, действующую на частицу; б) работу А, совершаемую над частицей силами поля при её перемещении из точки M(1,1,1,) в точку N(2,2,3).

Решение

Используя выражение, связывающее потенциальную энергию частицы с силой, действующей на неё, получим

$$\vec{F} = -gradU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= a\left[-\frac{1}{y}\vec{i} + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\right)\vec{j} + \frac{y}{z^2}\vec{k}\right].$$

Работа сил потенциального поля равна убыли потенциальной энергии

$$A_{12} = -\Delta U = U_1 - U_2 .$$

По известным координатам точек M и N находим

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = a\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{a}{3}, \qquad A_{12} = -\frac{a}{3}\,Дж .$$

Пример 2. Частица совершает перемещение в плоскости *XУ* из точки с координатами (1,2) *м* в точку с координатами (2,3) *м* под действием силы $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ *Н*. Определить работу данной силы.

Решение

Элементарная работа, совершаемая силой $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{r}$, равна скалярному произведению этих векторов

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = (3\vec{i} + 4\vec{j})(dx\vec{i} + dy\vec{j}) = 3dx + 4dy .$$

Работа при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 определится интегрированием

$$A_{12} = \int dA = \int_{x1}^{x2} 3dx + \int_{y1}^{y2} 4dy = 3(x_2 - x_1) + 4(y_2 - y_1).$$

Подставляя числовые значения, получим

$$A_{12} = 7\,Дж .$$

Пример 3. Тело массой m=1,0 *кг* падает с высоты h=20 *м*. Пренебрегая сопротивлением воздуха найти среднюю мощность, развиваемую силой тяжести на пути h, и мгновенную мощность на высоте h/2.

Решение

Средняя мощность $N_{ср,}$ развиваемая силой тяжести на пути h, определяется выражением

$$N_{ср} = F \cdot \upsilon_{ср} = mg\upsilon_{ср} .$$

Запишем выражение координаты *y(t)* тела от времени при свободном падении с высоты *h* с нулевой начальной скоростью:

$$y(t) = h - gt^2/2,$$

где g – ускорение свободного падения.

Полное время *t* падения тела с высоты *h* определим из этого выражения при условии *y* = 0: $h = gt^2/2$, откуда $t = \sqrt{2h/g}$.

Среднее значение скорости равно

$$\upsilon_{ср} = h/t = h\Big/\sqrt{2h/g} = \sqrt{gh/2},$$

тогда

$$N_{ср} = m\sqrt{g^3h/2}.$$

Мгновенная мощность, развиваемая силой тяжести на высоте *h*/2, равна

$$N_1 = mg\upsilon_1.$$

Расстояние, пройденное телом за промежуток времени t_1, равно

$$h/2 = h - gt_1^2/2,$$

откуда $t_1 = \sqrt{h/g}$.

Мгновенная скорость υ_1 тела на высоте *h*/2 , равна

$$\upsilon_1 = gt_1 = g\sqrt{h/g} = \sqrt{gh}.$$

Тогда

$$N = m\sqrt{g^3h}.$$

Выполняя вычисления, получим

$$N_{ср} = 97,2(Вт); \quad N = 137(Вт).$$

Пример 4. Маховик вращается по закону, выражаемому уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где A = 2 *рад*, B = 32 *рад/с*, С = -4 *рад/с²*. Найти среднюю мощность $\langle N \rangle$, развиваемую силами, действующими на маховик при его вращении, до остановки, если момент инерции I = 100 *кг·м²*.

Решение

Средняя мощность по определению

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}, \tag{1}$$

где t- время торможения до полной остановки, А- работа, совершаемая за это время.

Работа при вращательном движении

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi .$$

С учётом основного уравнения динамики вращательного движения $M=I\varepsilon$, получим

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} I\varepsilon d\varphi , \tag{2}$$

где $\varepsilon = \varphi'' = 2C = -8 рад/с^2$ - угловое ускорение, φ_1 *и* φ_2 - углы поворота при t = 0 и в момент остановки.

Время торможения до остановки найдём из условия $\omega = 0$.

$$\omega = \varphi' = B + 2Ct = 0 ,$$

откуда $t = -\dfrac{B}{2C} = 4с.$

С учётом значений t, найдём $\varphi_2 = 66 рад$, *а* $\varphi_1 = 2 рад.$

После интегрирования (2) получим абсолютное значение работы сил торможения

$$A = +8I(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1) найдём

$$\langle N \rangle = \frac{8I(\varphi_2 - \varphi_{1)}}{t} = 12{,}8 кВт.$$

1.6. Законы сохранения

Любое тело (или совокупность тел) представляет собой, по существу, систему материальных точек. Состояние системы характеризуется одновременным заданием координат и скоростей всех ее частиц. При движении системы ее состояние изменяется со временем. Существуют, однако, такие функции координат и скоростей, образующих систему частиц, которые способны сохраняться во времени. К ним относятся энергия, импульс и момент импульса.

В соответствии с этим имеют место три закона сохранения – закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса, которые выполняются в замкнутых системах.

Система называется замкнутой, если она не обменивается с другими телами, не входящими в эту систему, соответственно энергией, импульсом, моментом импульса. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса можно получить исходя из основных уравнений динамики, однако, следует иметь в виду, что эти законы обладают гораздо большей общностью, чем законы Ньютона, и должны рассматриваться как самостоятельные фундаментальные принципы физики, относящиеся к основным законам природы.

Законы сохранения являются эффективным инструментом исследования. С помощью законов сохранения можно без решения уравнения движения получить ряд важнейших данных о протекании механических процессов.

1.6.1. Закон сохранения импульса

Импульс системы $\vec{P}$ равен векторной сумме импульсов ее отдельных частиц, т.е.

$$\sum_i \vec{P}_i = \sum_i m_i \vec{\upsilon}_i \ , \qquad (1.60)$$

где $\vec{P}_i$ – импульс i-й частицы.

Изменение импульса системы, согласно законам динамики, равно результирующему вектору импульса внешних сил:

$$\sum_i d\vec{P}_i = \sum_i \vec{F}_i dt \ . \qquad (1.61)$$

В соответствии с этим уравнением, импульс системы может изменяться под действием только импульса внешних сил. Импульсы внутренних сил не могут изменить импульс системы. Отсюда непосредственно вытекает условие замкнутости системы $(\sum \vec{F}_{i\,внеш} dt = 0)$ и закон сохранения импульса**:** импульс замкнутой механической системы остается постоянным:

$$\sum_i \vec{P}_i = const \,. \qquad (1.62)$$

1.6.2. Закон сохранения момента импульса

Момент импульса произвольной системы относительно оси Z определяется как сумма моментов импульсов ее частиц

$$L_z = \sum_i L_{iz} \ , \qquad (1.63)$$

где L_{iz} – момент импульса относительно оси Z для i-й частицы системы.

Из основного закона динамики для вращательного движения системы следует, что

$$dL_z = \sum_i M_{i\ внеш.z}\, dt \ . \qquad (1.64)$$

Это означает, что момент импульса системы относительно некоторой оси Z может изменяться под действием только суммарного момента импульса внешних сил относительно той же оси. Суммарный момент всех внутренних сил всегда равен нулю, поскольку моменты сил каждой пары взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению, т.е. уравновешивают друг друга. Отсюда непосредственно вытекает условие замкнутости вращающейся системы $\sum M_{внеш.z} dt = 0$ и закон сохранения момента импульса**:** если суммарный момент импульса внешних сил относительно неподвижной оси тождественно равен нулю, то момент импульса системы относительно этой оси сохраняется, т.е.

$$L_z = const \ . \qquad (1.65)$$

1.6.3. Закон сохранения механической энергии

Пусть движущаяся частица обладает кинетической энергией *T*. Изменение кинетической энергии может быть обусловлено работой как консервативных, так и неконсервативных сил:

$$\Delta T = A_{неконс.} + A_{конс.} . \qquad (1.66)$$

Работа, совершаемая консервативной силой, равна убыли потенциальной энергии, т.е.

$$A_{конс} = -\Delta U \ .$$

С учетом этого

$$\Delta T = A_{неконс} - \Delta U \ , \qquad \text{или}$$

$$\Delta(T+U) = \Delta E_{мех} = A_{неконс.} , \qquad (1.66)$$

где $E_{мех.} = T + U$ – полная механическая энергия частицы, а $\Delta E_{мех.}$ - ее изменение.

Таким образом, изменение полной механической энергии частицы обусловлено работой только неконсервативных сил. Если на частицу не действуют неконсервативные силы $dA_{неконс} = 0$, то полная механическая энергия частицы остается неизменной:

$$\Delta E_{мех} = 0 \quad \text{и} \quad E_{мех} = T + U = const \,. \qquad (1.67)$$

Этот вывод можно обобщить на систему, состоящую из любого числа взаимодействующих тел. Только в случае системы тел необходимо иметь в виду следующее: неконсервативные силы, действующие на тело системы, могут быть и внутренними, и внешними. Поэтому для того, чтобы сохранилась механическая энергия системы тел, необходимо, чтобы система была замкнутой (не действуют внешние неконсервативные силы) и консервативной (не действуют внутренние неконсервативные силы).

Таким образом**,** полная механическая энергия замкнутой консервативной системы есть величина постоянная. В этом заключено существо одного из основных законов механики – закона сохранения и превращения механической энергии.

Если внутри замкнутой системы действуют неконсервативные силы, то механическая энергия такой системы постепенно уменьшается, превращаясь в другие, немеханические формы энергии. Такие замкнутые неконсервативные системы, механическая энергия которых убывает, называются диссипативными**.**

В принципе любая реальная механическая система диссипативна, ибо в любой системе всегда действуют какие-либо неконсервативные силы, например силы трения, силы сопротивления, пластические деформации и т.д., приводящие к диссипации энергии (латинское слово «диссипация» означает рассеяние).

Однако, согласно универсальному закону сохранения энергии*,* в любой замкнутой системе убыль механической энергии в точности равна приращению энергии других, немеханических видов, т.е. полная энергия различных форм движения в такой системе сохраняется неизменной.

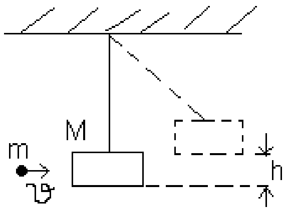
Примеры решения задач на законы сохранения

Пример 1. Пуля массой m =15*г*, летящая с горизонтальной скоростью υ =500 *м/с*, попадает в баллистический маятник M = 6 *кг* и застревает в нем. Определить высоту h , на которую поднимется маятник после удара.

Решение

При неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса, в соответствии с которым

$$m\upsilon = (m + M)u \ .$$



После удара, пренебрегая силами сопротивления воздуха, можно воспользоваться законом сохранения механической энергии

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh \, .$$

Решая совместно полученные уравнения, найдем

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(m\upsilon)^2}{2g(m+M)^2}\ ; \qquad h = 7{,}9\ см.$$

Пример 2. Шар массой m_1= 8*кг* движется со скоростью υ_1= 2*м/с* и сталкивается с шаром массой m_2= 4*кг*, который движется ему навстречу со скоростью υ_2= 5*м/с*. Найти скорость шаров после прямого центрального удара. Удар считать абсолютно упругим.

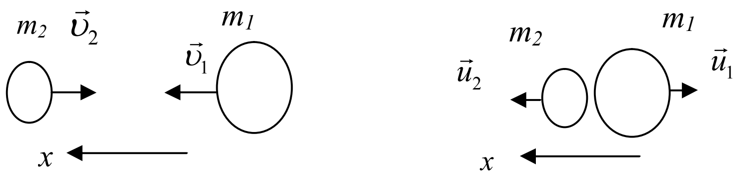
Решение

При абсолютно упругом ударе выполняются законы сохранения импульса и механической энергии:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2},$$

где u_1 и u_2 скорости шаров после упругого удара.



Направления векторов скоростей шаров послу удара выберем произвольно и проведем ось x параллельно векторам скорости. В проекциях на ось x закон сохранения импульса примет вид:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -m_1u_1 + m_2u_2,$$

или

$$m_1(\upsilon_1 + u_1) = m_2(u_2 + \upsilon_2). \qquad (1)$$

Закон сохранения механической энергии можно представить в виде $\quad m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2)$,

или $\quad m_1(\upsilon_1 + u_1)(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 + \upsilon_2)(u_2 - \upsilon_2).$

Из этого уравнения с учётом (1) получим:

$$m_2(\upsilon_2 + u_2)(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 + \upsilon_2)(u_2 - \upsilon_2),$$

откуда

$$u_1 = -u_2 + \upsilon_2 + \upsilon_1. \qquad (2)$$

Подставляя полученное выражение (2) в (1), получим:

$$m_1(\upsilon_1 - u_2 + \upsilon_2 + \upsilon_1) = m_2(u_2 + \upsilon_2).$$

Далее найдём

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Подставим полученное выражение (3) в (2):

$$u_1 = -\frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} + \upsilon_2 + \upsilon_1,$$

после преобразования найдём

$$u_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + \upsilon_1(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Выполним вычисления:

$$u_1 = 3,6(м/с); \qquad u_2 = 3,4(м/с).$$

Пример 3. Из орудия, не имеющего противооткатного устройства**,** производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда орудие было неподвижно закреплено, снаряд вылетел со скоростью υ_1 = 600 *м/с*, а когда орудию дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью υ_2 = 580 *м/с*. С какой скоростью откатилось при этом орудие?

Решение

Система “орудие - снаряд” является замкнутой, поэтому можно применить закон сохранения импульса. Так как в начальный момент система покоилась, то импульс системы в процессе взаимодействия должен быть равен нулю.

Пусть υ_1 – скорость снаряда без отката орудия, υ_2 – скорость снаряда с откатом орудия, u – скорость отката орудия, m_1 – масса снаряда, m_2 – масса орудия, тогда закон сохранения импульса имеет вид:

$$m_1\upsilon_2 - m_2u = 0,$$

откуда

$$u = \frac{m_1}{m_2}\upsilon_2. \qquad (1)$$

Работа пороховых газов идёт на увеличение кинетической энергии системы:

$$A=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}, \quad и \quad A=\frac{m_1\upsilon_2^2}{2}+\frac{m_2u^2}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_2^2}{2}+\frac{m_2u^2}{2}.$$

С учётом уравнения (1) получим:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}=\frac{m_1\upsilon_2^2}{2}+\frac{m_1^2}{2m_2}\upsilon_2^2, \quad \text{или}$$

$$\frac{m_1\upsilon_2^2}{2}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)=\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}.$$

Следовательно $\quad 1+\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}; \quad \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}-1.$

Подставляя m_1/m_2 в уравнение (1), найдём

$$u=\upsilon_2\left(\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon_2^2}-1\right)=580\left[\left(\frac{600}{580}\right)^2-1\right]=40,7\,м/с.$$

Пример 4. Тонкий стержень массой m и длинной L подвешен за один конец и может вращаться без трения. К той же оси подвешен на нити длиной l шарик такой же массы. Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой длине нити шарик после удара о стержень остановится? Удар абсолютно упругий.

Решение

В соответствии с законом сохранения момента импульса для системы шарик-стержень будет иметь

$$m\upsilon l=I\omega \;, \tag{1}$$

где I-момент инерции стержня относительно оси вращения. По теореме Штейнера

$$I=I_c+md^2=\frac{1}{12}mL^2+\frac{1}{4}mL^2=\frac{1}{3}mL^2.$$

С учетом этого уравнение (1) приводится к виду

$$\upsilon l = \frac{1}{3} L^2 \omega .$$

При абсолютно упругом ударе выполняется закон сохранения механической энергии, в соответствии с которым

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (2)$$

или после преобразования

$$\upsilon^2 = \frac{1}{3} L^2 \omega^2 \; . \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1) и (3), найдем

$$l = L \big/ \sqrt{3} \, .$$

Пример 5. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Стержень служит осью колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $\nu' = 10 c^{-1}$. Радиус колеса равен 20 *см,* его масса m = 3*кг*. Определить частоту вращения ν_1 скамьи, если человек повернёт стержень на угол 180^0. Суммарный момент инерции человека и скамьи I = 6 *кг·м*^{2}.

Решение

Система “скамья – человек - колесо” является замкнутой и к ней можно применить закон сохранения момента импульса:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_0 = \vec{L}_1{}' + \vec{L}_0{}', \qquad (1)$$

где $\vec{L}_1$ *и* $\vec{L}_1{}'$ - моменты импульса системы “скамья - человек” до и после поворота колеса; $\vec{L}_0$ *и* $\vec{L}_0{}'$ - момент импульса колеса до и после поворота.

Учитывая что $\vec{L}_1 = I\omega$ $и$ $\vec{L}_1{}' = I\omega'$, $\vec{L}_0{}' = -\vec{L}_0$, $\left|L_0'\right| = \left|L_0\right| = I_0\omega_1$, уравнение (1) принимает вид

$$I\omega + I_0\omega_1 = I\omega' - I_0\omega_1 .$$

Так как в исходном состоянии скамья Жуковского была в покое (ω = 0), то отсюда

$$I\omega' = 2I_0\omega_1 ,$$

и
$$\omega' = \frac{2I_0\omega_1}{I} . \tag{2}$$

Выражая угловую скорость через частоту ν, получим

$$2\pi\nu' = \frac{2I_0 2\pi\nu_1}{I}, \quad \text{или} \quad \nu' = \frac{2I_0\nu_1}{I} .$$

Учитывая, что момент инерции колеса I_0 = mR^2 (тонкое кольцо), окончательно получим

$$\nu' = \frac{2mR^2}{I} \cdot \nu_1 .$$

После подстановки исходных данных

$$\nu' = 0,4 c^{-1}.$$

1.7. Механика упругодеформируемых тел

Все реальные тела деформируются. Под действием приложенных сил они меняют свою форму или объем. Такие изменения называются **деформациями**. Различают два предельных случая деформации: **упругие** и **пластические**.

Упругими называются деформации, исчезающие после прекращения действия приложенных сил. Пластическими деформациями называются такие деформации, которые сохраняются в теле, по крайней мере частично, и после прекращения действия приложенных сил.

Ограничимся изучением только упругих деформаций, считая тела идеально упругими. Такая идеализация возможна лишь для очень малых деформаций. Для них существует линейная зависимость между действующими силами и вызванными ими деформациями, подчиняющаяся закону Гука.

Любая сложная деформация твердого тела может быть представлена как результат наложения более простых деформаций. Рассмотрим основные виды деформаций: одноосное растяжение (сжатие) и сдвиг.

1.7.1 Одноосное растяжение и сжатие

Возьмём однородный стержень (рис.1.12) и приложим к его основаниям растягивающие (или сжимающие) усилия. Пусть l_o - длина недеформированного стрежня, а S - его сечение. После приложения силы F его длина получает приращение Δl и делается равной $l = l_o + \Delta l$. Отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\ , \qquad (1.68)$$

называется относительным удлинением стержня. В случае растягивающих сил оно положительно, в случае сжимающих сил – отрицательно.

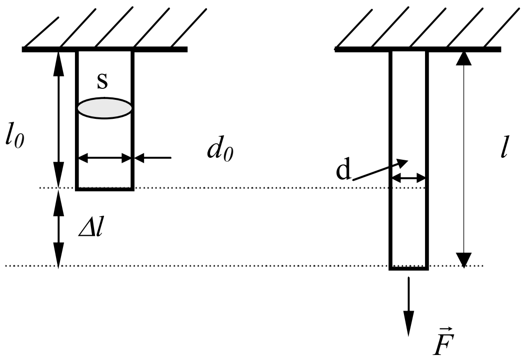


Рис.1.12

В любом поперечном сечении деформированного стержня возникнут **нормальные упругие напряжения**, численно равные упругой силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения тела, т.е.

$$\sigma_n = \frac{F}{S} . \tag{1.69}$$

Закон Гука для деформации растяжения (сжатия) имеет вид

$$\sigma_n = E\varepsilon , \tag{1.70}$$

где E - модуль Юнга.

Модуль Юнга зависит только от материала стержня и его физического состояния. При $\Delta\, l = l - l_0 = l_0$ и $\varepsilon = 1$ $E = \sigma_{n}$. Поэтому, модуль Юнга равен тому нормальному напряжению, которое возникло бы в образце при увеличении его длины в 2 раза, если бы при такой деформации выполнялся закон Гука. Однако при таких больших деформациях закон Гука не выполняется и образец либо разрушается, либо нарушается пропорциональность между деформацией и силой.

Под действием растягивающей или сжимающей силы изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Характеристикой этого изменения является относительное поперечное сжатие (растяжение)

$$\varepsilon_i = \frac{d - do}{do} = \frac{\Delta d}{do} , \tag{1.71}$$

где d - поперечный размер образца.

При растяжении $\varepsilon < 0$, при сжатии $\varepsilon > 0$. Отношение

$$\mu = \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} , \tag{1.72}$$

называется коэффициентом Пуассона.

Для больших изотропных материалов он близок к 0,25. Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ.

Деформированное тело обладает запасом потенциальной энергии. Эта энергия называется упругой. Она равна работе, затраченной на деформацию тела,

$$U = A = \int_0^{\Delta l} f(x)dx = \frac{E\varepsilon^2}{2}V . \qquad (1.73)$$

Объемная плотность упругой энергии W, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объема растянутого (сжатого) стержня, равна

$$W = \frac{U}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2E} . \qquad (1.74)$$

1.7.2. Сдвиг

Сдвигом называют такую деформацию твердого тела, при которой все его плоские слои, параллельные некоторой плоскости, называемой плоскостью сдвига, смещаются параллельно друг другу (рис.1.13,а). Сдвиг происходит под действием касательной силы F, приложенной к грани ВС, параллельной плоскости сдвига. Грань АД параллельная ВС, закреплена неподвижно (рис.1.13,б). При малом сдвиге:

$$\gamma \approx tg\gamma = \frac{CC'}{CД}, \qquad (1.75)$$

где Δx = CC’ - абсолютный сдвиг, а γ - угол сдвига, называемый также относительным сдвигом.

Закон Гука для деформации сдвига имеет вид

$$\sigma_\tau = G\gamma , \qquad (1.76)$$

где $\sigma_\tau = F/S$– скалывающее или тангенциальное напряжение, G - модуль сдвига.

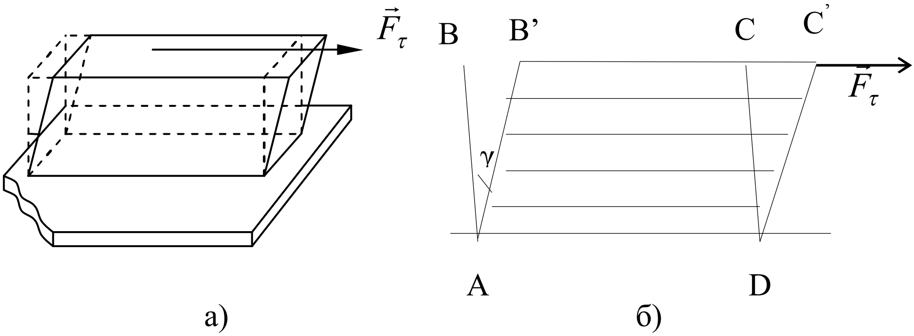


Рис.1.13

Модуль сдвига численно равен касательному напряжению, которое возникло бы в образце при относительном сдвиге, равном единице, если бы в этом случае выполнялся закон Гука.

Между модулем сдвига, модулем Юнга и коэффициентом Пуассона существует соотношение

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad . \tag{1.77}$$

Объемная плотность энергии упругой деформации при сдвиге, как и при растяжении, прямо пропорциональна квадрату напряжения и обратно пропорциональна модулю упругости:

$$W = \frac{\sigma_\tau^2}{2G} \quad . \tag{1.78}$$

Примеры решения задач на деформацию твердых тел

Пример 1. Медная проволока длиной l = 80 *см* и сечением S = 8 *мм*^{2} закреплена одним концом в подвесном устройстве, а к её другому концу прикреплён груз массой m = 400 *г*. Вытянутую проволоку с грузом, отклонив до высоты подвеса, отпускают. Считая проволоку невесомой, определить её удлинение в нижней точке траектории движения груза. Модуль Юнга для меди E = 118 *ГПа*.

Решение

Из закона Гука для продольного растяжения $\sigma = E\varepsilon$, где $\sigma = F/S$ - напряжение при упругой деформации, Е – модуль Юнга, $\varepsilon = \Delta l / l$ -относительное продольное растяжение, получим

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}, \tag{1}$$

где F – сила, растягивающая проволоку в нижней точке траектории груза. Она численно равна сумме силы тяжести и центростремительной силы, действующей на груз:

$$F = mg + \frac{m\upsilon^2}{l + \Delta l}, \tag{2}$$

где υ – скорость груза.

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mg(l + \Delta l).$$

Подставив найденное отсюда выражение для $m\upsilon^2$ в формулу (2), получим $F = 3mg$. Тогда из выражения (1) следует, что искомое удлинение проволоки

$$\Delta l = \frac{3mgl}{ES}.$$

Вычисляя, находим $\Delta l = 9{,}98 \cdot 10^{-4}$ *м.*

Пример 2. Если на верхний конец вертикально расположенной спиральной пружины положить груз, то пружина сожмётся на Δl =*3мм.* На сколько сожмёт пружину тот же груз, упавший на конец пружины с высоты h = 8*см*?

Решение

В соответствии с законом сохранения механической энергии, полная энергия груза, падающего на пружину, равна энергии упругой деформации пружины при её сжатии. Полная энергия груза равна его потенциальной энергии U; при этом за нулевой уровень отсчёта потенциальной энергии примем положение сжатой пружины при падении груза (рис.1), тогда

$$mg(h+\Delta L)=\frac{k\Delta L^2}{2}, \qquad (1)$$

где m – масса груза, g – ускорение свободного падения; k – жёсткость пружины.

Если груз положить на пружину (рис.2), то в соответствии с законом Гука запишем:

$$F_{упр}=k\Delta l\,. \qquad (2)$$

В состоянии равновесия сила упругости равна силе тяжести груза

$$mg=k\Delta l\,,$$

откуда

$$k=\frac{mg}{\Delta l}\,.$$

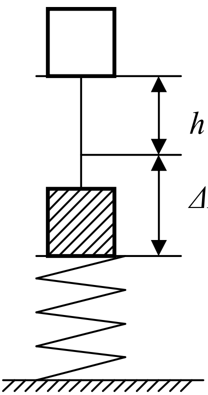


Рис.1

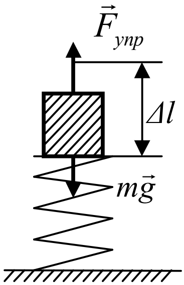


Рис.2

Подставляя полученное выражение для k в уравнение (1), получим:

$$mg(h+\Delta L)=\frac{\frac{mg}{\Delta l}\Delta L^2}{2}\ . \qquad (3)$$

Уравнение (3) можно преобразовать к виду

$$\Delta L^2-2\Delta L\Delta l-2h\Delta l=0.$$

Тогда решение этого уравнения, удовлетворяющее физическому смыслу задачи (решением задачи будет являться лишь положительный корень), будет иметь вид:

$$\Delta L=\Delta l\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{\Delta l}}\right).$$

Выполняя вычисления, получим

$$\Delta L=2,51\cdot10^{-2}\,(м).$$

Пример 3. Из пружинного пистолета был произведён выстрел вертикально вверх. Определить высоту h, на которую поднимается пуля массой m = 20 *г*, если пружина жёсткостью k = 196 *Н/м* была сжата перед выстрелом на x = 10 *см*. Массой пружины пренебречь.

Решение

Система пуля – Земля (вместе с пистолетом) является замкнутой системой, в которой действуют консервативные силы – силы упругости и силы тяготения. Поэтому для решения задачи можно применить закон сохранения механической энергии. Согласно этому закону, полная механическая энергия E_1 в начальном состоянии (перед выстрелом) равна полной энергии E_2 в конечном состоянии (когда пуля поднялась на высоту h), т.е.

$$\mathrm{E}_1=\mathrm{E}_2, \quad \text{или} \quad T_1+U_1=T_2+U_2, \qquad (1)$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия системы в начальном и конечном состояниях; U_1 и U_2 – потенциальные энергии в тех же состояниях.

Так как кинетические энергии пули в начальном и конечном состояниях равны нулю, то равенство (1) примет вид

$$U_1 = U_2. \qquad (2)$$

Если потенциальную энергию в поле тяготения Земли на её поверхности принять равной нулю, то энергия системы в начальном состоянии равна потенциальной энергии сжатой пружины, т.е. $U_1 = kx^2/2$, а в конечном состоянии – потенциальной энергии пули на высоте h, т.е. $U_2 = mgh$.

Подставив приведённые выражения U_1 и U_2 в формулу (2), найдём

$$\frac{kx^2}{2} = mgh; \quad \text{или} \quad h = \frac{kx^2}{2mg}.$$

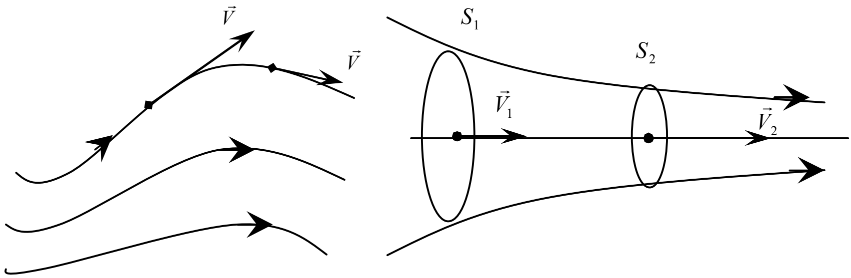
Произведя вычисления, получим $h = 5$ *м*.

1.8. Механика жидкостей и газов

1.8.1. Идеальная жидкость. Уравнение неразрывности. Уравнение Бернулли

В гидроаэромеханике используется единый подход к изучению жидкостей и газов. Жидкости и газы рассматривают как сплошные среды, не вдаваясь в их молекулярное строение. Жидкость считается несжимаемой, поскольку ее плотность мало зависит от давления. Однако, как показывают расчеты, при движении газов со скоростями, намного меньшими скорости звука в этой среде, их также можно с достаточной точностью считать несжимаемыми. Движение жидкости (газа) называется течением, а совокупность движущихся частиц жидкости – потоком.

Графически движение жидкости изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис.1.14.а). Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют трубкой тока (рис.1.14.в).



а) в)

Рис.1.14

Течение жидкости называется **стационарным** (установившимся), если значение скоростей в каждой ее точке со временем не меняется. Для стационарного течения несжимаемой жидкости справедливо соотношение

$$S_1V_1 = S_2V_2 = const \quad . \tag{1.79}$$

Следовательно, при стационарном течении произведе ние скорости течения на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная. Это соотношение называется **уравнением неразрывности.**

Жидкость, у которой полностью отсутствуют силы внутреннего трения, называется идеальной. Течение идеальной жидкости не сопровождается диссипацией энергии.

Применение закона сохранения механической энергии к установившемуся течению жидкости позволяет получить соотношение

$$\frac{\rho V^2}{2} + \rho g h + p = const \quad . \tag{1.80}$$

Это уравнение называется **уравнением Бернулли**.

Величина p в формуле называется статическим давлением, величина $\rho V^2/2$ - динамическим давлением (напором), а величина $\rho g h$ - гидростатическим давлением. Для горизонтальной трубки выражение (1.80) принимает вид

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = const\ , \tag{1.81}$$

где $p_0 = p + \dfrac{\rho V^2}{2}$ - полное давление.

Из формул (1.79) и (1.81) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в широких местах, т.е. там, где скорость меньше.

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого имеется малое отверстие (рис.1.15).

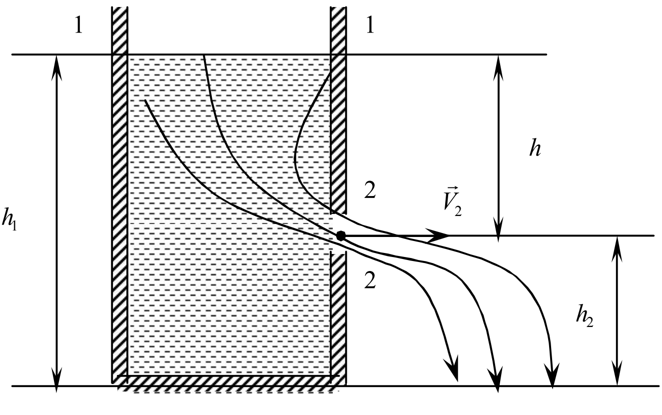


Рис.1.15

Напишем уравнение Бернулли для сечений на уровне h_1 и h_2:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \qquad (1.82)$$

Так как давления p_1 и p_2 в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т.е. $p_1 = p_2$, то уравнение будет иметь вид

$$\frac{V_1^2}{2} + g h_1 = \frac{V_2^2}{2} + g h_2. \qquad (1.83)$$

Из уравнения неразрывности (1.79) следует, что $V_2/V_1 = S_1/S_2$, где S_1 и S_2 - площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если $S_1 >> S_2$, то $V_2^2 = 2g(h_2 - h_1) = 2gh$, или

$$V_2 = \sqrt{2gh}. \qquad (1.84)$$

1.8.2. Вязкость. Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

Идеальная жидкость, т.е. жидкость без внутреннего трения, является абстракцией. Всем реальным жидкостям и газам присуще внутреннее трение, называемое вязкостью.

Вязкость – это свойство реальных жидкостей обмениваться импульсами при перемещении одной части жидкости относительно другой. Вязкость проявляется, в частности, в том, что возникшее в жидкости или газе течение после прекращения действия причин, его вызвавших, постепенно прекращается.

Рассмотрим установившееся медленное течение жидкости в круглой трубе (рис.1.16). Ее скорость меняется от нуля в непосредственной близости к стенкам сосуда до максимума на оси трубы. Жидкость оказывается как бы разделенной на слои, которые скользят друг относительно друга, не перемешиваясь. Такое течение называется **ламинарным** (слоистым).

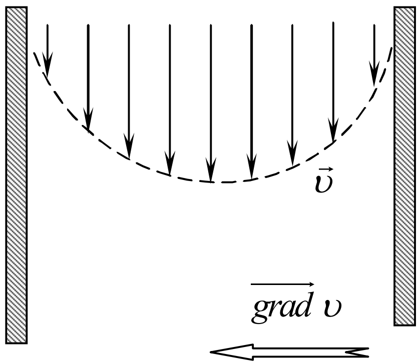


Рис.1.16

Между слоями жидкости действуют силы внутреннего трения, удовлетворяющие соотношению

$$F = \eta \left|\frac{\Delta\,\upsilon}{\Delta\,n}\right| S\ , \qquad (1.85)$$

где η - коэффициент динамической вязкости, зависящий от природы и состояния жидкости; $\Delta\upsilon/\Delta h$ - градиент скорости, показывающий, как быстро изменяется скорость в направлении, перпендикулярном движению слоев; S - площадь слоя.

Единица вязкости – паскаль-секунда ($[\eta] = Па \cdot с$). Это вязкость такой среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости, равном единице, возникает сила внутреннего трения в 1 $Н$ на 1 $м^2$ поверхности касания слоев.

Вязкость зависит от температуры. У жидкостей вязкость уменьшается с увеличением температуры, а у газов, наоборот, увеличивается. Это указывает на различие в них механизмов внутреннего трения.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. С увеличением скорости характер течения жидкости резко меняется. Происходит интенсивное вихревое образование и перемешивание жидкости (газа). Такое течение называется **турбулентным** (вихревым). Характер течения определяется значением безразмерной величины, называемой числом Рейнольдса,

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V l}{\eta}, \qquad (1.86)$$

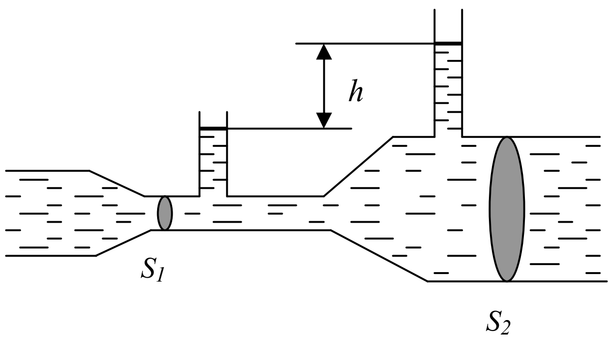
где l - характерный размер сечения.

При малых Re течение носит ламинарный характер. Начиная с некоторого значения Re, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер.

Один из методов определения коэффициента вязкости основан на измерении скорости падения в жидкости медленно движущихся небольших тел сферической формы.

Примеры решения задач на механику жидкостей

Пример 1. Водомер представляет собой горизонтальную трубу переменного сечения, в которую впаяны две вертикальные манометрические трубки одинакового сечения (см. рис.). По трубе протекает вода. Пренебрегая вязкостью воды, определить её массовый расход, если разность уровней в манометрических трубках Δh = 8 *см*, а сечение трубы у оснований манометрических трубок соответственно равны S_1= 6 *см*^{2} и S_2 = 12 *см*^{2}. Плотность воды ρ = 1 *г/см*^{3}.



Решение

Массовый расход воды – это масса воды, протекающая через сечение трубы за единицу времени,

$$Q = \frac{m}{\Delta t} = \frac{\rho \upsilon_2 S_2 \Delta t}{\Delta t} = \rho \upsilon_2 S_2 \,, \qquad (1)$$

где ρ – плотность воды, υ_2 – скорость течения воды в месте сечения S_2.

При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости выполняются уравнение неразрывности

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 \,, \qquad (2)$$

и уравнение Бернулли для горизонтальной трубы ($h_1 = h_2$)

$$p_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} \,, \qquad (3)$$

где p_2 и p_2 – статические давления в сечениях манометрических трубок, υ_1 и υ_2 – скорости течения воды в местах сечения S_1 и S_2. Учитывая что

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h \,,$$

И решая систему уравнений (2) и (3), получим

$$\upsilon_2 = S_1 \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{S_2^2 - S_1^2}} \,.$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), найдём массовый расход воды:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2 g \Delta h}{S_2^2 - S_1^2}} \,.$$

Вычисляя, получим Q = 0,868 *кг/с*.

Пример 2. Стальной шарик (плотность ρ_1=9*г/см*^{3}) падает с постоянной скоростью в сосуде с глицерином (ρ_2=1.26 *г/см*^{3}, динамическая вязкость η = 1,48 *Па·с*). Определить предельный диаметр шарика, считая, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 0{,}5$.

Решение

При установившемся движении шарика в жидкости (υ=*const*) сила тяжести шарика mg уравновешивается суммой выталкивающей силы F_A и силы внутреннего трения F:

$$mg = F_A + F \quad \text{или} \quad \rho_1 gV = \rho_2 gV + 6\pi\eta r\upsilon , \qquad (1)$$

где V – объём шарика. Подставив в уравнение (1) $V = 4\pi r^3/3$ и решив его относительно υ, получим

$$\upsilon = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)gr^2}{9\eta} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gd^2}{18\eta}.$$

Для шара небольшого радиуса, движущегося в вязкой жидкости, число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_2 \upsilon d/\eta$, откуда

$$d_{\max} = \frac{\eta \, \mathrm{Re}_{кр}}{\rho_2 \upsilon} = \sqrt[3]{\frac{18\eta^2 \, \mathrm{Re}_{кр}}{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2 g}}.$$

Вычисляя, получим d_{max}= 5,91*мм.*

1.9. Основы релятивистской механики

Релятивистская механика или специальная теория относительности - это механика тел, движущихся со скоростями сравнимыми со скоростью света. Она значительно сложнее и в гораздо меньшей степени согласуется с нашим здравым смыслом, поскольку опыта с такими движениями человек в повседневной практике не имеет. Создание Эйнштейном в 1905г. специальной теории относительности привело к пересмотру многих представлений классической физики и главным образом представлений о свойствах пространства и времени.

Начнем этот раздел с краткого обзора ньютоновских представлений о пространстве и времени, лежащих в основе классической механики.

1. 9.1. Преобразования координат и принцип относительности Галилея

Согласно представлениям Ньютона пространство и время являются абсолютными, т.е. независящими как друг от друга, так и от присутствующих в пространстве тел. Пространство и время одинаково для всех систем отсчета.

В классической механике пространство считается однородным, изотропным, трехмерным и подчиняющимся евклидовой геометрии, т.е. не является искривленным. Фундаментальным свойством времени является его однонаправленность и равномерность течения в разных системах отсчета.

Из этих представлений вытекают преобразования координат Галилея, выражающие пространственно-временную связь любого события в разных инерциальных системах отсчета.

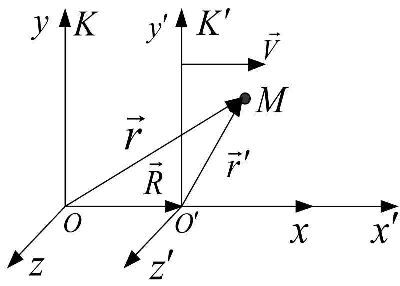


Рис.1.17

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета. Допустим, что система K' движется относительно системы K поступательно с постоянной скоростью $\vec{V}$, параллельной оси x (рис.1.17). Для простоты будем полагать, что координатные оси систем соответственно параллельны и что в начальный момент времени $t = 0$ начала координат обеих систем совпадают. Тогда координаты и время в этих системах будут связаны друг с другом соотношениями

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad t' = t \tag{1.87}$$

или в проекциях на оси

$$x' = x - Vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \tag{1.88}$$

Эти соотношения называются преобразованиями координат Галилея. С точки зрения житейского опыта, преобразования Галилея кажутся вполне очевидными. Но всегда ли этот опыт достаточен для доказательства истины? Обсудим это в следующих главах.

Из преобразований Галилея непосредственно вытекает классический закон сложения скоростей

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} \text{ или } \vec{\upsilon}\,' = \vec{\upsilon} - \vec{V}. \tag{1.89}$$

Дифференцирование по времени уравнения (1.89), с учетом постоянства $\vec{V}$, дает

$$\vec{a}\,' = \vec{a}. \tag{1.90}$$

Полученный результат означает, что ускорение инвариантно относительно преобразований Галилея.

Не меняется при переходе из одной инерциальной системы в другую и сила $(\vec{F}\,' = \vec{F})$. Это следует из того, что сила зависит от расстояния между взаимодействующими материальными точками, а эти расстояния, как это следует из преобразований Галилея, одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Масса также предполагается величиной постоянной, не зависящей от ее положения и скорости ($m = const$). Следовательно, второй закон Ньютона имеет один и тот же вид в различных инерциальных системах отсчета

$$\vec{F}\,' = m\vec{a}\,' \text{ и } \vec{F} = m\vec{a}. \tag{1.91}$$

Такая закономерность справедлива и для других законов механики. Таким образом, все законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, иначе говоря, инвариантны относительно преобразований Галилея. Это утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея. Из этого принципа следует полное равноправие всех инерциальных систем отсчета и его можно также сформулировать следующим образом: никакими механическими опытами, проведенными в пределах инерциальной системы отсчета, нельзя установить, находится ли она в покое или движется равномерно и прямолинейно. На основе законов механики нельзя выделить из множества инерциальных систем какую-то главную систему отсчета, которая обладала бы какими-либо преимуществами перед другими.

1.9.2. Постулаты специальной теории относительности

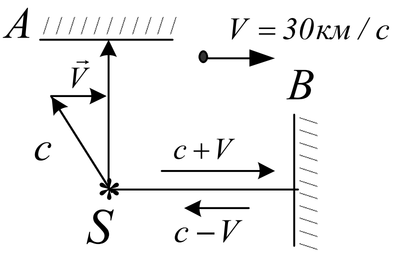


Рис. 1.18

По мере развития других разделов физики, в частности оптики и электродинамики, возник естественный вопрос: распространяется ли принцип относительности и на другие явления? Если нет, то нельзя ли выделить из множества инерциальных систем отсчета главную или абсолютную систему отсчета?

Для ответа на эти вопросы Майкельсоном был осуществлен его знаменитый опыт. В эксперименте Майкельсона использовалось движение Земли по ее орбите со скоростью 30км/с. Свет от источника S (рис.1.18) посылался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, отражался от зеркал A и B, находящихся на одинаковом расстоянии от источника, и возвращался обратно. В этом опыте сравнивалось время прохождения светом обоих путей: SAS и SBS.

Несмотря на то, что ожидаемая разность времен, определяемая в соответствии с законом сложения скоростей, была чрезвычайно мала, но прибор (интерферометр Майкельсона) был достаточно чувствительным, чтобы эту разность надежно обнаружить. Тем не менее, результат опыта оказался отрицательным: разность времен не была обнаружена.

Последующие, многочисленные опыты подтвердили первоначальный результат.

Отрицательный результат опыта Майкельсона прежде всего показал, что скорость света не зависит от скорости источника. Если бы скорость света зависела от скорости источника, то разность времен была бы различима. Таким образом, было установлено, что скорость света в вакууме является величиной инвариантной, т.е. одинаковой во всех инерциальных системах отсчета.

Глубокий анализ всего экспериментального и теоретического материала, накопленного к тому времени, привел Эйнштейна к созданию специальной теории относительности, связавшей необычный характер распространения света с фундаментальными свойствами пространства и времени. В качестве исходных позиций специальной теории относительности Эйнштейн принял два постулата, в пользу которых, прежде всего, свидетельствовал опыт Майкельсона. Эти постулаты носят название принципа относительности Эйнштейна и принципа постоянства скорости света.

Первый постулат или принцип относительности Эйнштейна представляет собой обобщение принципа относительности Галилея на любые физические процессы: *все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета; все уравнения, выражающие законы природы, инвариантны, т.е. не меняются, при переходе от одной инерциальной системы к другой.*

В соответствии с данным постулатом, все инерциальные системы отсчета эквивалентны по своим физическим свойствам. Никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную, иначе говоря, абсолютной системы отсчета не существует.

Второй постулат выражает **принцип инвариантности скорости света:** *скорость света в вакууме не зависит от* *движения источника света и одинакова во всех направления, во всех инерциальных системах отсчета.*

Скорость света в вакууме является предельной, никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не могут распространяться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчета.

Постулаты специальной теории относительности противоречили классическим представлениям о свойствах пространства и времени, положенных в основу преобразований Галилея. В ньютоновской механике считалось само собой разумеющимся, что результаты измерений длины одного и того же стержня когда он покоится, и когда движется, относительно масштабной линейки совпадают. Эйнштейн же считал, что до опыта (a priori) по этому поводу ничего сказать нельзя. Эйнштейн также показал, что существование предельной скорости света приводит к тому, что понятие одновременности, считавшееся абсолютным, в действительности является относительным. В разных системах отсчета время течет неодинаково.

Кроме этого, Эйнштейн обратил внимание на то, что физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие. Для описания события в данной системе отсчета нужно указать место, в котором оно происходит, и момент времени, когда оно происходит.

1.9.3. Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца

Постулаты специальной теории относительности требовали новых правил перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой. Такие правила, а именно, новые преобразования координат и времени были получены Лоренцем.

Предположим, что происходит какое-то событие. В системе K оно характеризуется значением координат и времени (x,y,z,t). В системе K' (рис.1.17), движущейся относительно системы K с постоянной скоростью V, направленной вдоль совпадающих осей x и x', - значениями координат и времени (x', y', z', t'). Формулы, связывающие штрихованные и нештрихованные значения координат и времени, имеют следующий вид

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (1.92)$$

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.93)$$

Здесь c – скорость света, $\beta = V/c$.

Из данных формул видно, что при $c \to \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея (1.88). Это означает, что различие в течение времени в разных системах отсчета обусловлено существованием предельной скорости распространения взаимодействий.

При скоростях много меньших скорости света ($\beta << 1$) преобразования Лоренца не отличаются от преобразований Галилея. Следовательно, преобразования Галилея не теряют своего значения, и могут быть использованы при малых по сравнению со скоростью света скоростях.

Наконец, при $V > c$ выражения для координат и времени в формулах (1.92) и (1.93) становятся мнимыми, свидетельствуя о том, что движение со скоростями большими скорости света в вакууме невозможно. Невозможна и система отсчета, движущаяся со скоростью c, поскольку при $V = c$ знаменатели формул (1.92) и (1.93) обращаются в нуль.

Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с точки зрения ньютоновской механики следствий.

Сокращение длины. Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x и покоящийся относительно системы отсчета K' (рис.1.19). Длина его в этой системе равна

$$\ell_0 = x_2' - x_1',$$

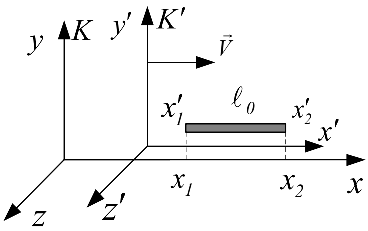


Рис.1.19

где x_1', x_2' - не изменяющиеся со временем t' координаты концов стержня. Относительно системы K стержень движется вместе с системой K' со скоростью V. Для определения его длины в этой системе нужно отметить координаты концов стержня в один и тот же момент времени t. Разность этих координат $\ell = x_2 - x_1$ даст длину стержня, измеренную в системе K. Для нахождения соотношения между l и l_0, воспользуемся преобразованиями Лоренца

$$x_1' = \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad x_2' = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда получаем

$$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}\,. \tag{1.94}$$

Таким образом, длина стержня ℓ, измеренная в системе, относительно которой он движется, оказывается меньше «собственной» длины ℓ_0, измеренной в системе, относительно которой он покоится. Поперечные размеры стержня в обеих системах одинаковы. Итак, для неподвижного наблюдателя размеры движущихся тел в направлении их движения сокращаются, и тем больше, чем больше скорость движения.

Замедление времени. Пусть в системе K' в одной и той же точке с координатой $x' = a$ происходит какое-то событие, длящееся время $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$. Относительно системы K точка, в которой происходит это событие, перемещается. Согласно формулам (1.93), началу и концу события в системе K соответствуют моменты времени

$$t_1 = \frac{t_1' + (V/c^2)a}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + (V/c^2)a}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

отсюда получаем

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.95)$$

В этой формуле Δt_0 - время, отсчитанной по часам, движущимся вместе с телом. Это время называется собственным временем и обычно обозначается буквой τ. Время Δt измерено по часам системы, относительно которой тело движется со скоростью V.

Рассматривая прошедшее событие из системы K, можно определить Δt как его длительность, измеренную по неподвижным часам, а $\Delta t_0 = \Delta\tau$ - как длительность, измеренную по часам, движущимся вместе с телом. Представляя формулу (1.95) в виде

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}, \qquad (1.96)$$

можно сказать, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся $(\Delta\tau < \Delta t)$. Эта зависимость особенно сильно проявляется при скоростях, сравнимых со скоростью света.

Замедление времени является следствием постоянства скорости света во всех системах отсчета. Эффект замедления времени в настоящее время с высокой точностью подтверждается экспериментально.

Относительность одновременности разнесенных в пространстве событий. Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = b$. В системе K' этим событиям будут соответствовать моменты времени

$$t_1' = \frac{b - (V/c^2)x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2' = \frac{b - (V/c^2)x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.97)$$

Из полученных формул видно, что пространственно разобщенные $(x_1 \neq x_2)$ и одновременные в системе K события, не будут одновременными $(t_1' \neq t_2')$ в системе K'. При этом разность $t_2' - t_1'$ будет различна по величине и может отличаться по знаку в различных системах отсчета.

Закон сложения скоростей. Ввиду того, что согласно преобразованиям Лоренца, изменяются не только координаты, но и время, меняется и закон сложения скоростей.

Если в системе K тело движется со скоростью υ, имеющей составляющие по осям координат $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$, то в системе K' для составляющих скорости тела, получаем

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - V}{1 - V\upsilon_x/c^2}, \qquad \upsilon_y' = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2}, \qquad \upsilon_z' = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2}. \qquad (1.98)$$

В частности, положив в (1.98) $\upsilon_x = c$, получим

$$\upsilon_x' = \frac{c - V}{1 - Vc/c^2} = c. \qquad (1.99)$$

Этот результат не является удивительным, поскольку в основе преобразования Лоренца лежит инвариантность скорости света.

1.9.4. Импульс и энергия в релятивистской механике

Закон сохранения импульса – один из основных законов природы, отражающий однородность пространства. Однако, чтобы он был инвариантен к преобразованиям Лоренца, выражение для импульса тела требует корректировки.

Соответствующее выражение импульса в релятивистской механике было получено Эйнштейном

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (1.100)$$

Опыт показывает, что определенный таким образом импульс обладает основными свойствами, присущими импульсу в классической механике. Он сохраняется в замкнутых системах тел, а скорость его изменения равна силе, действующей на тело. Следовательно, релятивистское выражение второго закона Ньютона имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) = \vec{F}. \qquad (1.101)$$

Получим теперь выражение для кинетической энергии в релятивистской механике. Элементарное приращение кинетической энергии равно работе силы, действующей на тело за время dt, т.е.

$$dT = \delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{\upsilon})dt,$$

где $\vec{F}$ определяется по формуле (1.101).

Проведя соответствующие преобразования, после интегрирования получим

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2. \qquad (1.102)$$

Нетрудно показать, что при $\upsilon << c$ формула (1.102) преобразуется в классическую формулу для кинетической энергии.

Закон сохранения энергии в релятивистской механике оказывается инвариантным только в том случае, если свободной частице, кроме кинетической энергии приписать дополнительную энергию, равную

$$E_0 = mc^2. \qquad (1.103)$$

Эта энергия представляет собой внутреннею энергию тела и называется энергией покоя. Под полной энергией в релятивистской механике подразумевается сумма кинетической энергии и энергии покоя тела. В соответствии с (1.102) полная энергия равна

$$E = T + E_0 = T + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}. \qquad (1.104)$$

Решая систему двух уравнений (1.100) и (1.104), получим выражение для полной энергии через импульс тела

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \qquad (1.105)$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 = inv. \qquad (1.106)$$

Следовательно, при переходе от одной системы отсчета к другой полная энергия и импульс изменяются, но неизменным остается выражение (1.106).

Остановимся теперь на двух важных следствиях, вытекающих из полученных соотношений.

Взаимосвязь массы и энергии. Согласно (1.103) всякое изменение массы тела сопровождается изменением энергии покоя, т.е.

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m. \qquad (1.107)$$

Это утверждение носит название закона взаимосвязи массы и энергии.

Взаимосвязь массы и энергии приводит к тому, что суммарная масса взаимодействующих частиц не сохраняется. Рассмотрим следующий пример. Пусть две частицы массы m, движущиеся навстречу друг другу с равными скоростями, претерпевают неупругое соударение. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = Mc^2, \qquad (1.108)$$

откуда

$$M = 2m / \sqrt{1-\upsilon^2 / c^2} > 2m,$$

где M - масса, образовавшейся частицы.

Таким образом, масса образовавшейся частицы больше суммы масс исходных частиц. Увеличение массы обусловлено тем, что кинетическая энергия превратилась в эквивалентное количество энергии покоя, приведшее к возрастанию массы. При распаде неподвижной частицы на несколько частиц, наблюдается обратное явление.

Частицы с нулевой массой. Ньютоновская механика не допускает существование частиц с нулевой массой. Законы релятивистской механики не противоречат существованию таких частиц.

Из формул (1.100) и (1.104) следует, что частица с массой покоя $m = 0$ может иметь энергию и импульс только в том случае, если она движется со скоростью света. При этом обе формулы принимают вид 0/0, что не означает, тем не менее, неопределенности энергии и импульса такой частицы. Согласно (1.103) связь между ними выражается соотношением

$$E = pc. \qquad (1.109)$$

К числу таких частиц принадлежит фотон. Движение со скоростью света, это единственное состояние в котором эти частицы могут существовать. Остановка такой частицы равносильна ее исчезновению.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Молекулярная физика изучает строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

2.1. Идеальный газ. Уравнение состояния идеального газа

Простейшим объектом исследований молекулярной физики является идеальный газ. **Идеальный газ** – это модель реального газа, обладающего следующими свойствами:

- собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;
- между молекулами отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими.

Количество вещества, обозначаемое ν, в системе СИ измеряется в молях**:** 1 *моль* - такое количество вещества, в котором содержится столько же атомов или молекул, сколько в 12 *г* чистого изотопа углерода $^{12}_{6}C$. Моль – основная единица системы СИ. Один моль разных веществ содержит одно и то же число молекул N_A=6,02·10^{23}, называемое числом Авогадро. Масса одного моля вещества M, называемая молярной массой, равна

$$M = m_0 N_A, \qquad (2.1)$$

где m_0 – масса молекулы.

Число молекул в произвольной массе вещества определяется выражением

$$N = \frac{m}{M} N_A = \nu N_A, \qquad (2.2)$$

где m – масса газа, ν – количества вещества.

Состояние некоторой массы газа m определяется параметрами состояния, к которым относятся давление p, объем V, температура T. На основании обобщения экспериментальных данных было получено соотношение, связывающее основные макроскопические параметры состояния газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \qquad (2.3)$$

где $R = 8{,}31 \, ^{Дж}\!/_{моль \cdot K}$ - универсальная газовая постоянная. Это уравнение называется **уравнением состояния** идеального газа или **уравнением Менделеева - Клапейрона**.

Введя новую фундаментальную постоянную $k = {}^{R}\!/_{N_A}$, называемую постоянной Больцмана, получим еще одну форму записи уравнения состояния

$$p = nkT\,, \tag{2.4}$$

где $n = {}^{N}\!/_{V}$ - концентрация молекул.

Это уравнение показывает, что при одинаковых значениях температуры и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул, а моли любых газов занимают одинаковые объемы (закон Авогадро).

Давление смеси идеальных газов подчиняется закону Дальтона, в соответствии с которым это давление равно сумме парциальных давлений, входящих в нее газов

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i\,, \tag{2.5}$$

Парциальное давление это давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал этот объем при той же температуре.

2.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа (МКТ) связывает параметры состояния газа с характеристиками движения его молекул

$$p = \frac{2}{3} n\overline{E}\,. \tag{2.6}$$

Здесь $\overline{E} = \frac{m_0 \overline{\upsilon}_{кв}^2}{2}$ - средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы, а $\overline{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\upsilon_i^2}$ - ее средняя квадратичная скорость.

Из сравнения выражений (2.4) и (2.6) следует, что

$$\overline{E} = \frac{3}{2}kT. \qquad (2.7)$$

Эта формула раскрывает физический смысл температуры. Абсолютная температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа. При $T = 0K$ прекращается поступательное движение молекул и давление газа равно нулю.

Из уравнения

$$\frac{m_0 \overline{\upsilon}_{кв}^2}{2} = \frac{3}{2}kT$$

получим значение среднеквадратичной скорости молекул

$$\overline{\upsilon}_{кв} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (2.8)$$

2.3. Распределение молекул по скоростям

В газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону.

Пусть скорости dN молекул попадают в интервал от υ до $\upsilon+d\upsilon$. Относительное число молекул, скорости которых лежат в указанном интервале, отнесённое к ширине интервала $d\upsilon$, называется функцией распределения молекул по скоростям

$$f(\upsilon)=\frac{dN(\upsilon)}{Nd\upsilon}. \tag{2.9}$$

Функция распределения молекул газа по скоростям была получена Максвеллом и имеет следующий вид:

$$f(\upsilon)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon^2 e^{\frac{-m_0\upsilon^2}{2kT}}d\upsilon\ . \tag{2.10}$$

Здесь m_0 - масса отдельной молекулы, k – постоянная Больцмана, T – температура. Тогда число молекул, скорости которых заключены в пределах от υ до $\upsilon+d\upsilon$, определяется выражением

$$dN(\upsilon)=Nf(\upsilon)d\upsilon=4\pi N\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\upsilon^2 e^{\frac{-m_0\upsilon^2}{2kT}}, \tag{2.11}$$

где N – общее число молекул.

График функции $f(\upsilon)$ представлен на рис. 2.1.

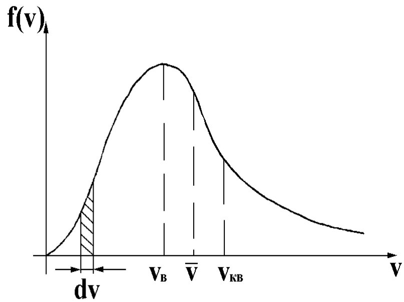


РИС.

Площадь заштрихованного участка $f(\upsilon)d\upsilon=dN/N$ равна доле молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon+d\upsilon$. Просуммировав доли молекул, во всем интервале скоростей, получим единицу. Это означает, что площадь, ограниченная функцией $f(\upsilon)$ и осью абсцисс, равна единице

$$\int_0^\infty f(\upsilon)d\upsilon = 1\,. \qquad (2.12)$$

Выражение (2.12) представляет собой условие нормировки функции распределения молекул по скоростям.

Конкретный вид функции зависит от рода газа и от температуры. С повышением температуры максимум функции смещается вправо (рис.2.2). Площадь же, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому с повышением температуры кривая растягивается и понижается.

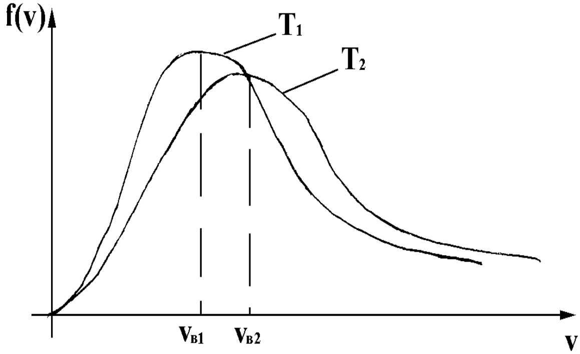


Рис. 2.2

С ростом температуры увеличивается доля молекул, имеющих большую скорость. Скорость, при которой функция $f(\upsilon)$ достигает максимума, называется наиболее вероятной скоростью. Этой и близкой к ней скоростью обладает наибольшее число молекул. Значение наиболее вероятной скорости можно найти из условия $f(\upsilon)' = 0$.

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}\,, \qquad (2.13)$$

где m_0 - масса молекулы, M - молярная масса.

Наряду с наиболее вероятной скоростью в молекулярно - кинетической теории пользуются понятием средней арифметической и средней квадратичной скорости:

$$\bar{\upsilon} = \frac{1}{n}\int_0^{\infty} \upsilon f(\upsilon) d\upsilon = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad (2.14)$$

$$\upsilon_{кв} = \sqrt{\int_0^{\infty} \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (2.15)$$

Значение средней квадратичной скорости, рассчитанной по закону Максвелла, совпадает с ранее полученным выражением (2.8).

2.4. Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Молекулы любого газа находятся в поле тяготения Земли. Если бы не было теплового движения молекул атмосферного воздуха, то все они упали бы на Землю. Если бы не было тяготения, то атмосферный воздух рассеялся бы во Вселенной. Тяготение и тепловое движение приводят газ в состояние, при котором его концентрация и давление убывают с высотой.

Зависимость давления от высоты выражается формулой:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}, \qquad (2.16)$$

где p и p_0 – давление газа на высотах h и h_0=0; M – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная; T – температура.

Используя (2.16) можно получить формулу для определения высоты по показаниям барометра

$$h = \frac{RT}{Mg} \ln \frac{p_0}{p}. \qquad (2.17)$$

Эту формулу называют **барометрической**. Высоты обычно определяются относительно уровня моря, где давление считается нормальным.

Уравнение (2.16) с учетом соотношения $p = nkT$ можно записать в форме

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \qquad (2.18)$$

Заменив $\dfrac{R}{M} = \dfrac{k}{m_0}$ и вводя потенциальную энергию молекулы в поле тяготения Земли $\varepsilon_p = m_0 gh$, получим **закон распределения Больцмана**

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}. \qquad (2.19)$$

Из закона распределения Больцмана следует, что при постоянной температуре концентрация газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул. Закон Больцмана носит универсальный характер, он справедлив в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

2.5. Эффективный диаметр и средняя длина свободного пробега молекул

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы** d (рис.2.3). В первом приближении эффективный диаметр можно считать постоянным, хотя он и зависит от скорости сталкивающихся молекул, т.е. от температуры газа.

Путь, пройденный молекулой между двумя последовательными столкновениями, имеет самые различные значения. Однако, при очень большом числе столкновений молекул, можно ввести понятие среднего значения, называя его **средней длиной свободного пробега** λ.

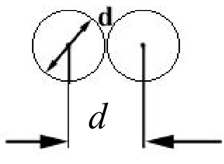


Рис.2.3

Расчет средней длины свободного пробега молекулы приводит к следующему соотношению

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi n d^2}. \qquad (2.20)$$

Здесь n – концентрация молекул, $\sigma = \pi d^2$ - эффективное сечение молекулы.

Таким образом, средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна их концентрации n, а при постоянной температуре, с учётом (2.19) , обратно пропорциональна давлению, т.е.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Зная среднюю длину свободного пробега молекулы можно определить и среднее число ее столкновений за одну секунду

$$Z = \frac{\upsilon}{\lambda} = \sqrt{2}\pi d^2 n \upsilon. \qquad (2.21)$$

2.6. Явления переноса

Средняя длина свободного пробега λ определяет такие свойства газов, как вязкость, теплопроводность и диффузия.

Явление диффузии состоит в самопроизвольном проникновении и перемешивании молекул соприкасающихся газов, жидкостей и даже твёрдых тел. В химически однородном газе перенос массы вещества происходит при наличии градиента плотности и подчиняется **закону Фика**:

$$M = -D\frac{d\rho}{dx}St, \qquad (2.22)$$

где M -масса вещества, диффундирующего за время t через площадку S, расположенную перпендикулярно градиенту плотности $d\rho/dx$; D - коэффициент диффузии. Знак «минус» показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности. Коэффициент диффузии численно равен массе молекул, переносимых через единичную площадку за единицу времени при градиенте плотности молекул равном единице.

Явление теплопроводности состоит в переносе количества теплоты в сторону убывания температуры. Этот процесс подчиняется **закону Фурье**:

$$Q = -k \frac{dT}{dx} St \, , \tag{2.23}$$

где Q - количество теплоты, переносимое через площадку S за время t при градиенте температуры dT/dx в направлении нормали к этой площади; k - коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, переносимой через единицу площади за единицу времени при температурном градиенте, равном единице.

Вязкость (внутреннее трение) обусловлена возникновением сил трения между слоями газа, перемещающимися параллельно друг другу с различными скоростями. Механизм возникновения внутреннего трения между слоями газа связан с обменом молекул между слоями, в результате которого происходит перенос импульса упорядоченного движения молекул из одного слоя в другой, что в свою очередь, приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Внутреннее трение подчиняется **закону Ньютона**:

$$F = \eta \frac{dv}{dx} S \, , \tag{2.24}$$

где η - коэффициент вязкости, $d\upsilon/dx$ - градиент скорости в направлении перпендикулярном площадке S.

Из формулы (2.24) следует, что коэффициент вязкости численно равен силе внутреннего трения, действующей на единицу площади поверхности слоя при градиенте скорости равном единице.

Выражения для коэффициентов диффузии, теплопроводности и внутреннего трения выводятся из молекулярно-кинетической теории.

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\lambda \ , \qquad (2.25)$$

$$k = \frac{1}{3}\rho c_v \bar{v}\lambda \ , \qquad (2.26)$$

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\lambda \ , \qquad (2.27)$$

где ρ -плотность газа, c_v – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме, $\bar{v}$ - средняя арифметическая скорость молекул, λ -средняя длина свободного пробега.

Из формул (2.25) - (2.27) следуют простые зависимости между коэффициентами переноса:

$$\eta = \rho D \text{ и } k = c_v\eta . \qquad (2.28)$$

Примеры решения задач по МКТ

Пример 1. Определить молярную массу M смеси кислорода массой m = 25 *г* и азота массой m = 75 *г*.

Решение

Молярная масса смеси M есть отношение массы смеси m к количеству вещества смеси ν:

$$M = \frac{m}{\nu} . \qquad (1)$$

Масса смеси равна сумме масс компонентов смеси:

$$m = m_1 + m_2 .$$

Количество вещества смеси равно сумме количеств вещества компонентов:

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}.$$

Подставляя в формулу (1) выражения m и ν, получим

$$M = \left(m_1 + m_2\right) \Big/ \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right). \qquad (2)$$

Молярная масса кислорода M_1=32·10^{-3} *кг/моль*, азота M_2=28·10^{-3} *кг/моль*. Подставив значения величин в (2), получим

$$M = 28{,}9 \cdot 10^{-3}\ кг/моль.$$

Пример 2. Определить число молекул N, содержащихся в объёме V =1*мм*^{3} воды, и массу m_1 молекулы воды. Считать условно, что молекулы воды имеют форму шариков, соприкасающихся друг с другом.

Решение

Число N молекул, содержащихся в некоторой системе массой m, равно произведению постоянной Авогадро N_A на количество вещества ν:

$$N = \nu N_A.$$

Так как $\nu = m/M$, где M – молярная масса, то $N = mN_A/M$. Выразив в этой формуле массу как произведение плотности на объём V, получим

$$N = \rho V N_A / M.$$

Произведём вычисления, учитывая что M=18·10^{-3} кг/моль:

$$N = 3{,}34 \cdot 10^{19}\ молекул.$$

Массу m_1 можно найти по формуле

$$m_1 = M/N_A.$$

Подставив значения M и N_A, найдём массу молекулы воды:

$$m_1 = 2{,}99 \cdot 10^{-26}\ кг.$$

Пример 3. В баллоне объёмом 10*л* находится гелий под давлением p_1=10*МПа* и при температуре T_1=300*К*. После того как из баллона было взято m=10*г* гелия, температура в баллоне понизилась до T_2 =290 *К*. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение

Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} R T_2, \tag{1}$$

где m_2 – масса гелия в баллоне в конечном состоянии; M – молярная масса газа; R – молярная газовая постоянная.

Из уравнения (1) выразим искомое давление:

$$p_2 = \frac{m_2 R T_2}{MV}. \tag{2}$$

Массу m_2 выразим через массу m_1, соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона:

$$m_2 = m_1 - m. \tag{3}$$

Массу m_1 найдём из уравнения Менделеева – Клапейрона, применив его к начальному состоянию газа:

$$m_1 = M p_1 V / R T_1. \tag{4}$$

Подставляя выражение массы m_1 в (3), а затем выражение m_2 в (2), найдём

$$p_2 = \left(\frac{M p_1 V}{R T_1} - m \right) \frac{R T_2}{MV},$$

или

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M}\frac{RT_2}{V}.$$

Произведя вычисления , получим

$$P_2 = 3{,}64 \cdot 10^5 \text{ } Па = 0{,}364 \text{ } МПа.$$

Пример 4. В сосуде объёмом V=5 *л* находится азот массой m=1,4 *г* при температуре T = 1800 *К*. Найти давление газа, имея в виду, что при этой температуре η = 30% молекул диссоциировано на атомы.

Решение

Так как часть молекул диссоциирована на атомы, то в сосуде находится смесь двух газов с молярными массами $M_1 = 28 \cdot 10^{-3}$ к*г/моль* и $M_2 = M_1/2 = 14 \cdot 10^{-3}$ к*г/моль*. Уравнения состояния обоих газов имеют вид:

$$P_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \tag{1}$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT = 2\frac{m_2}{M_1} RT, \tag{2}$$

где P_1 и P_2 – парциальные давления молекулярного (N_2) и атомарного (N_1) азота. Давление смеси газов подчиняется закону Дальтона:

$$P = P_1 + P_2.$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$\left(P_1 + P_2\right)V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{2m_2}{M_1}\right)RT,$$

$$PV = \left(\left(m_1 + m_2\right) + m_2\right)\frac{RT}{M_1}.$$

Так как $m_1 + m_2 = m$ (масса газа), то

$$PV = \frac{m + m_2}{M_1} RT = \frac{mRT\left(1 + \frac{m_2}{m}\right)}{M_1} = \frac{mRT\left(1+\eta\right)}{M_1}.$$

Отсюда,

$$P=\frac{mRT\left(1+\eta\right)}{VM_1}\approx 1{,}9\cdot 10^5\,Па.$$

Пример 5. Какая часть молекул водорода, находящегося при температуре T = 900 $К$, обладает скоростями, отличающимися от наиболее вероятной скорости не более, чем на 5 *м/с*?

Решение

Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по относительным скоростям u:

$$dN(u)=Nf(u)du=\frac{4}{\sqrt{\pi}}Ne^{-u^2}u^2du,$$

где $u=\dfrac{v}{v_в}$. Так как часть молекул обладает скоростями превышающими $v_в$, а часть меньшими, чем $v_в$, то $\Delta v=10 м/с$. Наиболее вероятная скорость при T = 900 $К$

$$v_в=\sqrt{\frac{2RT}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8{,}31\cdot 900}{0{,}002}}=2{,}73\cdot 10^3\,м/с.$$

$$u=\frac{v}{v_в}\approx 1,\qquad \Delta u=\frac{\Delta v}{v_в}.$$

Отсюда $$\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\cdot\Delta u=\frac{4}{\sqrt{\pi}e}\cdot\frac{\Delta v}{v_в}\approx 0{,}003.$$

Пример 6. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считать температуру воздуха везде одинаковой и равной 10^{O} C.

Решение

Зависимость давления от высоты имеет вид:

$$p=p_0e^{\frac{-mg\,(h-h_0)}{kT}}=p_0e^{\frac{-Mg\,(h-h_0)}{RT}}.$$

На уровне моря $h_0=0$, поэтому $\dfrac{p}{p_0} = e^{\frac{-Mgh}{RT}}$.

Прологарифмируем обе части

$$\frac{Mgh}{RT} = -\ln\frac{p}{p_0}.$$

Отсюда,

$$h = -\frac{RT}{Mg}\ln\frac{p}{p_0} = 4,22\cdot 10^3\,м.$$

Пример 7. Найти среднюю продолжительность $\langle\tau\rangle$ свободного пробега молекул кислорода при температуре *T*=250 *К* и давлении *P* =100 *Па.*

Решение

Средняя продолжительность $\langle\tau\rangle$ свободного пробега молекул – величина, обратная среднему числу столкновений, происходящих за 1 секунду:

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\langle z\rangle}.$$

Так как $\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\cdot\langle v\rangle$, то

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n\cdot\langle v\rangle}.$$

Здесь n – концентрация молекул кислорода, $\langle v\rangle$ - средняя арифметическая скорость молекул кислорода.

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Из уравнения состояния идеального газа

$$n = \frac{p}{kT},$$

тогда $$\langle\tau\rangle = \frac{k\sqrt{MT}}{4\sqrt{\pi R}d^2 p}.$$

Эффективный диаметр молекул кислорода (величина справочная) $d = 0{,}36$ *нм* = $3{,}6\cdot10^{-10}$ *м*. После подстановки числовых значений получим
$$\langle\tau\rangle = 2{,}88\cdot10^{-7}\,c.$$

3. ТЕРМОДИНАМИКА

Термодинамика изучает общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями.

3.1. Внутренняя энергия идеального газа. Равномерное распределение энергии по степеням свободы молекул

Внутренняя энергия системы - энергия, зависящая только от её внутреннего состояния; она складывается из кинетической энергии хаотического движения атомов или молекул, потенциальной энергии межмолекулярных взаимодействий и энергии внутриатомных движений и взаимодействий. Поскольку в модели идеального газа потенциальная энергия межмолекулярных взаимодействий полагается равной нулю, то внутренняя энергия идеального газа определяется кинетической энергией теплового движения его молекул. В свою очередь энергия теплового движения молекул зависит от числа степеней свободы.

Числом степеней свободы тела называется число независимых координат, полностью определяющих положение тела в пространстве. Если одноатомную молекулу рассматривать как материальную точку, то для описания её положения в пространстве достаточно трёх независимых координат.

Следовательно, одноатомная молекула имеет три степени свободы. Двухатомная молекула с жёсткой связью между атомами имеет пять степеней свободы. Три из них определяют поступательное движение молекулы, две - вращательное. Если в молекуле три (и более) атома, связанных жёсткой связью, то число степеней свободы равно 6. Во многих случаях необходимо принимать во внимание возможность относительных смещений атомов в молекуле, т.е. вводить в рассмотрение колебательные степени свободы молекул.

Согласно закону Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул все степени свободы равноправны и вносят одинаковый вклад в ее среднюю энергию. Учитывая, что средняя энергия поступательного движения одноатомной молекулы по формуле (2.7), равна

$$\overline{E} = \frac{3}{2}kT,$$

получим кинетическую энергию, приходящуюся на одну степень свободы

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}kT. \tag{3.1}$$

Если молекула имеет i степеней свободы, то ее средняя кинетическая энергия

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT, \tag{3.2}$$

где $i = i_{пост} + i_{вращ} + 2i_{кол}$.

Колебательная степень обладает вдвое большей энергией поскольку на нее приходится не только кинетическая энергия, но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы.

С учетом (3.2), внутренняя энергия одного моля идеального газа равна

$$U_M = \langle\varepsilon\rangle N_A = \frac{i}{2}kTN_A = \frac{i}{2}RT, \tag{3.3}$$

а произвольной массы газа

$$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT \ . \tag{3.4}$$

Таким образом, внутренняя энергия идеального газа зависит от числа степеней свободы молекул и абсолютной температуры. Внутренняя энергия – однозначная функция состояния системы, она не зависит от пути перехода в данное состояние.

Изменение внутренней энергии газа связано с изменением температуры

$$dU = \frac{i}{2}\nu RdT \ . \tag{3.5}$$

3.2. Теплота и работа. Первое начало термодинамики

Внутренняя энергия системы может быть изменена только в результате взаимодействия системы с внешней средой. Такое взаимодействие может происходить двумя способами: путём теплообмена и путём совершения механической работы.

Теплообмен - самопроизвольный необратимый процесс передачи энергии, происходящий в неоднородном температурном поле.

Существуют следующие способы теплообмена:

а) теплопроводность - передача внутренней энергии от одних тел к другим при их соприкосновении, обусловленная тепловым движением атомов (молекул);

б) конвекция - перенос энергии, происходящий при перемешивании неодинаково нагретых слоев газа или жидкости под действием силы тяжести и выталкивающей силы;

в) излучение - передача внутренней энергии без участия промежуточной среды путём испускания и поглощения электромагнитного излучения.

Мерой энергии, передаваемой системе при теплообмене, служит количество теплоты Q. Элементарное приращение количества теплоты $dQ > 0$, если оно передаётся системе, и $dQ < 0$, если система отдаёт энергию. Отношение элементарного количества теплоты dQ, сообщаемого системе при бесконечно малом изменении её состояния в каком-либо процессе, к соответствующему изменению dT её абсолютной температуры, называется **теплоёмкостью** системы:

$$C = \frac{dQ}{dT}; \qquad [C] = \frac{Дж}{К}.$$

Таким образом, теплоёмкость системы численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить системе, для её нагревания на 1 *К*. **Удельная теплоёмкость** - физическая величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить 1 *кг* вещества для нагревания на 1 *К*:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}; \qquad [c] = \frac{Дж}{кг \cdot К}.$$

Молярная теплоёмкость - теплоёмкость одного моля вещества:

$$C_m = cM = \frac{M}{m}\frac{dQ}{dT} = \frac{1}{\nu}\frac{dQ}{dT}.$$

Следует различать теплоёмкости c_p, C_P и c_V, C_V. Первые характеризуют теплообмен при постоянном давлении, а вторые - при постоянном объёме.

Так как количество теплоты Q не является параметром состояния термодинамической системы, то элементарное количество теплоты является не полным дифференциалом, поэтому его обозначают δQ (сравните: внутренняя энергия системы - функция состояния; малое изменение внутренней энергии - полный дифференциал dU).

Но состояние системы можно изменить и другим способом, совершая над системой работу или давая ей возможность самой совершать работу, то есть путём изменения макроскопических параметров системы.

В качестве системы рассмотрим идеальный газ в сосуде с подвижным поршнем (рис 3.1). Если под действием силы F, с которой газ действует на поршень, последний переместился на расстояние dx, то газ совершил работу

$$\delta A = Fdx = PSdx = PdV \ ,$$

где P - давление газа, S - площадь поршня, $dV = S\ dx$ приращение объёма газа.

Элементарная работа δA - не полный дифференциал, так как работа зависит не только от начального и конечного состояния системы, но и от формы пути, по которому система переходит из одного состояния в другое, а значит A не является функцией состояния. Если газ расширяется, то $dV>0$ и, совершаемая им работа $\delta\ A > 0$, если сжимается - газ совершает отрицательную работу, $\delta\ A < 0$.

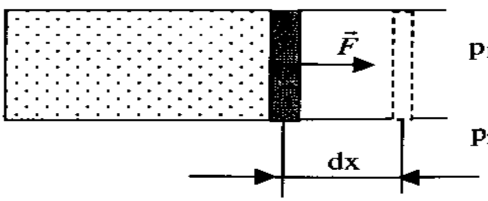


Рис.3.1

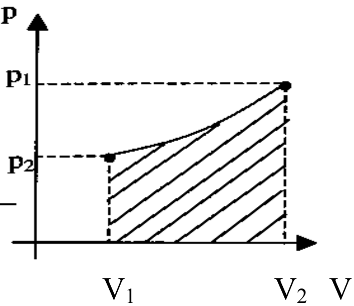


Рис.3.2

При расширении (сжатии) газа может изменяться не только объём, но и его давление. Поэтому, чтобы найти работу при конечном изменении объёма, нужно знать зависимость $p(V)$. Тогда работа определяется интегралом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \quad , \qquad (3.6)$$

который численно равен площади заштрихованной фигуры (рис.3.2).

Закон сохранения энергии в области тепловых явлений называется **первым началом термодинамики**: теплота, сообщаемая системе, затрачивается на увеличение внутренней энергии системы и на работу, которую система совершает над внешней средой

$$\delta Q = dU + \delta A . \tag{3.7}$$

3.3. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам. Молярная теплоемкость идеального газа

Изохорный процесс ($V = const$; $dV = 0$). Так как $dV = 0$, то работа при изохорном процессе $\delta A = 0$. Из первого закона термодинамики следует, что

$$\delta Q = dU , \tag{3.8}$$

то есть при изохорном процессе поступающая извне теплота δQ идёт только на приращение внутренней энергии dU системы. Учитывая, что $\delta Q = \nu C_V dT$, получаем

$$dU = \nu \cdot C_V dT , \tag{3.9}$$

C_V – молярная теплоёмкость при постоянном объеме.

Сопоставляя (3.5) и (3.9), найдем C_V

$$\nu \cdot C_V dT = \frac{i}{2} \nu \cdot RdT ,$$

$$C_V = \frac{i}{2} R. \tag{3.10}$$

Изобарный процесс ($P = const$, $dP = 0$). Передаваемое газу количество теплоты идёт на изменение его внутренней энергии и на совершение им работы при постоянном давлении:

$$\delta Q = dU + \delta A . \tag{3.11}$$

Пользуясь уравнением состояния, получим

$$\delta A = pdV = \nu RdT$$

Тогда, учитывая соотношение (3.9) и что $\delta Q = \nu C_V dT$, перепишем уравнение (3.11) в виде:

$$\nu C_p dT = \nu C_V dT + \nu R dT,$$

откуда

$$C_P = C_V + R. \qquad (3.12)$$

Это выражение называют **уравнением Майера**.

Из уравнения (3.12) следует, что $C_p > C_v$, $\left(C_P = \frac{i+2}{2} R \right)$.

При одном и том же $\delta\, Q,$ изменение температуры dT при изобарном процессе меньше, чем при изохорном, и, следовательно, теплоемкость больше.

Изотермический процесс ($T = const$, $dT = 0$).

Так как $dT = 0$, то внутренняя энергия системы при изотермическом процессе не изменяется, и вся поступающая извне теплота идёт на совершение системой работы:

$$Q = A = \int_{V1}^{V2} p dV. \qquad (3.13)$$

Учитывая, что согласно уравнению состояния идеального газа,

$$P = \frac{1}{V} \nu R T,$$

получим

$$A = \nu \cdot RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu \cdot RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (3.14)$$

3.4. Адиабатный процесс. Уравнение Пуассона

Адиабатный процесс - процесс без теплообмена с окружающей средой ($\delta Q = 0$). При $\delta Q = 0$ из (3.7) следует $\delta A = -dU$, то есть

$$PdV = -\nu C_V dT. \qquad (3.15)$$

Это означает, что система совершает работу за счёт убыли своей внутренней энергии. При адиабатном расширении система охлаждается, и наоборот, при адиабатном сжатии ее температура повышается.

Зависимость какого-либо параметра адиабатного процесса от другого называется **уравнением адиабаты**. Представим различные формы уравнения адиабаты:

$$TV^{\gamma-1} = const\,, \tag{3.16}$$

$$PV^{\gamma} = const\,, \tag{3.17}$$

где $\gamma = {C_p}/{C_V}$ - коэффициент Пуассона, представляющий отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

На рис.3.3 сопоставлены кривые для адиабатного и изотермического процессов. Так как $\gamma > 1$, то на диаграмме PV адиабата 1 круче, чем изотерма 2. Из уравнений (3.16) и (3.17) следуют полезные соотношения между параметрами двух разных точек адиабаты

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}. \tag{3.18}$$

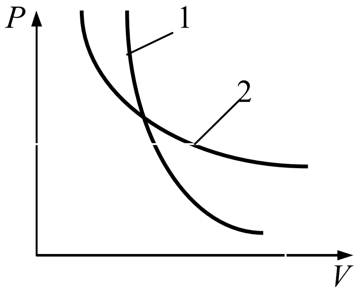


Рис.3.3

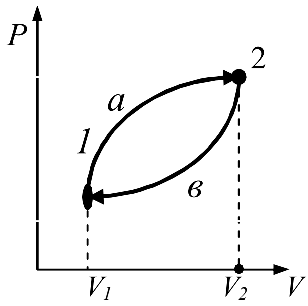


Рис.3.4

Выражение для работы при адиабатном процессе следует из уравнения (3.15):

$$A = \nu \cdot C_v(T_1 - T_2) = \frac{\nu \cdot R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1} \quad . \qquad (3.19)$$

3.5. Круговые процессы. Цикл Карно. Второе начало термодинамики

Круговым процессом или циклом называется процесс, при котором система, проходя через ряд состояний возвращается в исходное (рис.3.4). Цикл можно разбить на процессы расширения (1-*а*-2) и сжатия (2-*в*-1). Работа расширения положительна и равна площади под кривой 1-*а*-2, а работа сжатия отрицательна и равна площади под кривой 2-*в*-1. Следовательно, работа за цикл определяется площадью, охватываемой циклом. Если цикл протекает по часовой стрелке, то работа за цикл положительна ($A = \oint pdV$). Такой цикл называется прямым. Если же цикл протекает против часовой стрелки, то он называется обратным, а работа за цикл отрицательна. Прямой цикл используется в тепловых двигателях, а обратный – в холодильных машинах.

В результате цикла полное изменение внутренней энергии газа равно нулю, поэтому работа за цикл равна количеству полученной извне теплоты. Однако, в круговом процессе термодинамическая система, получившая некоторое количество теплоты Q_1 от нагревателя, обязательно отдаёт часть теплоты Q_2 холодильнику. Таким образом, КПД прямого кругового процесса, т.е. тепловой машины, определяется выражением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} . \qquad (3.20)$$

Цикл называется **обратимым**, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлениях, при этом в окружающей среде и в самой системе не происходит никаких изменений. Процесс неудовлетворяющий этим условиям, является **необратимым**. Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов.

Самым экономичным обратимым процессом является цикл Карно. Этот процесс состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис.3.5).

В качестве рабочего тела в цикле Карно используется идеальный газ, заключённый в сосуде с подвижным поршнем. Схема работы тепловой машины по циклу Карно показана в таблице.

КПД цикла Карно определяется только температурой нагревателя T_1 и холодильника T_2:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (3.21)$$

КПД всякого реального теплового двигателя ввиду неизбежных тепловых потерь гораздо меньше, чем для цикла Карно.

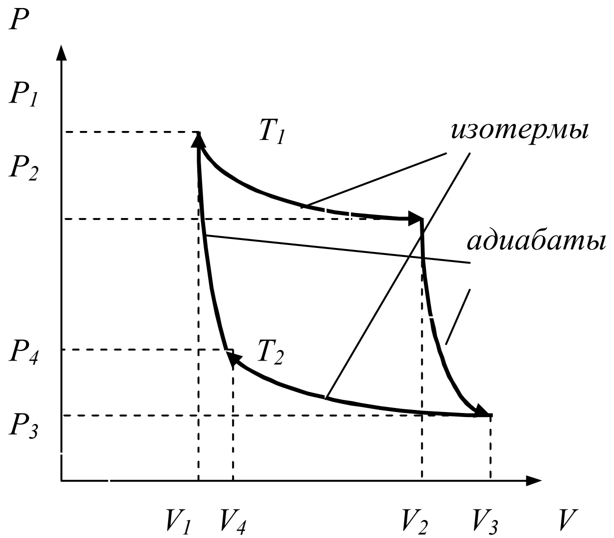
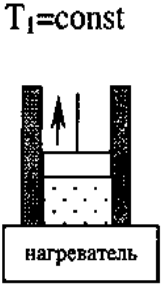
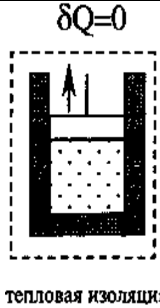
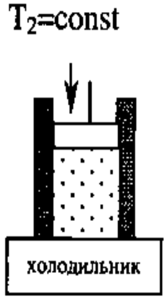
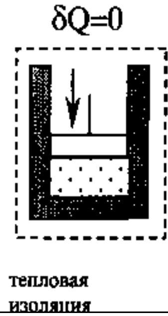


Рис.3.5

Как следует из (3.21), даже в идеализированном случае $\eta < 1$. Это означает, что невозможен процесс единственным результатом которого было бы превращение всей полученной от нагревателя теплоты в работу. Данное утверждение называют **вторым началом термодинамики**.

Процесс	1. Изотермическое расширение	2. Адиабатическое расширение	3. Изотермическое сжатие	4. Адиабатическое сжатие
				
Работа, совершаемая системой	$A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}$	$A_{23} = C_v \cdot (T_1 - T_2)$	$A_{34} = RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3}$	$A_{41} = C_v \cdot (T_2 - T_1)$

3.6. Энтропия

Для обратимого цикла Карно из выражений (3.20) и (3.21) следует, что

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

или с учётом того, что Q величина алгебраическая, получим

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Величина Q/T называется приведённым количеством теплоты. Следовательно, для цикла Карно сумма приведённых количеств теплоты равна нулю. Этот результат можно распространить на любые обратимые циклы, т.е.

$$\sum \frac{\delta Q_i}{T_i} = 0, \text{ или } \oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (3.22)$$

Полученный результат означает, что $\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ не зависит от пути интегрирования (последовательности промежуточных состояний), то есть величина $\delta Q/T$ является полным дифференциалом

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (3.23)$$

Функция состояния *S*, дифференциалом которой является $\frac{\delta Q}{T}$, называется энтропией: $[S] = \frac{Дж}{моль \cdot К}$.

Изменение энтропии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 равно

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (3.24)$$

В частности, для идеального газа

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + $$
$$+ \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} (C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1}) \quad (3.25)$$

В изолированной системе, предоставленной самой себе, процессы происходят в направлении увеличения энтропии. Следовательно, состояние равновесия характеризуется максимальной энтропией. Обратимые адиабатические процессы, для которых δQ=0, характеризуются постоянной энтропией, $S = const$.

Все реальные процессы необратимы. Энтропия в них растет. Поэтому для всех возможных процессов в изолированной системе (включая и обратимый) получаем

$$\Delta S \geq 0 \,, \quad (3.26)$$

то есть энтропия либо растёт, либо остаётся неизменной. Этот результат является ещё одним выражением второго начала термодинамики: в любых процессах, протекающих в изолированных системах, энтропия не убывает. Второй закон термодинамики определяет направленность тепловых процессов в изолированных системах: они всегда протекают в сторону увеличения энтропии. Если система не изолирована, то её энтропия может как возрастать, так и убывать в зависимости от знака $\delta Q/T$.

Как было установлено Больцманом, энтропия связана с термодинамической вероятностью системы W следующей формулой

$$S = k \ln W \,, \quad (3.27)$$

где k – постоянная Больцмана.

Термодинамическая вероятность W - это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы. Чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия, т.е. наиболее вероятном состоянии, число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия. Следовательно, энтропия является мерой неупорядоченности системы.

Примеры решения задач по термодинамике

Пример 1. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_{вр} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре *T*=350*K*, а также кинетическую энергию $E_к$ вращательного движения всех молекул кислорода массой $m = 4$*г*.

Решение

На каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия $\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2}kT$, где k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура газа. Так как вращательному движению двухатомной молекулы соответствуют две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода равна

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT\,. \qquad (1)$$

Кинетическая энергия вращательного движения всех молекул газа

$$E_к = \langle \varepsilon_{вр} \rangle N. \qquad (2)$$

Число всех молекул газа

$$N = N_A \nu\,, \qquad (3)$$

где N_A – постоянная Авогадро; ν – количество вещества.

Если учесть, что количество вещества $\nu = m/M$, где m – масса вещества; M – молярная масса газа, то формула (3) примет вид

$$N = N_A \frac{m}{M}.$$

Подставив выражение для *N* в выражение (2), получим

$$E_к = {N_A m \langle \varepsilon_{вр} \rangle} / {M} . \quad (4)$$

Учитывая, что для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ *кг/моль*, после подстановки числовых значений, получим:

$$\langle \varepsilon_{вр} \rangle = 4,83 \cdot 10^{-21} Дж; \quad E_к = 364 Дж .$$

Пример 2. Определить отношение удельных теплоёмкостей γ для смеси газов, содержащей гелий массой m_1=8 *г* и водород массой m_2 = 2 *г*.

Решение

Для нагревания смеси газов массой $m = m_1 + m_2$ на ΔT при постоянном объёме ей необходимо сообщить количество теплоты $Q = c_v m \Delta T$, где c_v - удельная теплоёмкость смеси. Часть этого количества теплоты, $Q_1 = c_{v_1} m_1 \Delta T$ пойдёт на нагревание гелия, другая часть $Q_2 = c_{v_2} m_2 \Delta T$ - на нагревание водорода. Тогда

$$Q = c_{v_1} m_1 \Delta T + c_{v_2} m_2 \Delta T \;,$$

$$c_v m \Delta T = c_{v_1} m_1 \Delta T + c_{v_2} m_2 \Delta T.$$

Отсюда

$$c_v = \frac{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2}{m_1 + m_2} .$$

Аналогично находим c_p смеси:

$$c_p = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{m_1 + m_2} .$$

Здесь c_{v_1}, c_{p_1} и c_{v_2}, c_{p_2} - удельные теплоёмкости гелия и водорода соответственно:

$$c_{v_1} = \frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1}; c_{v_2} = \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2}; c_{p_1} = \frac{i_1 + 2}{2}\frac{R}{M_1}; c_{p_2} = \frac{i_2 + 2}{2}\frac{R}{M_2}.$$

Так как гелий – газ одноатомный, то i_1=3, водород – газ двухатомный, следовательно, i_2=5.
Отношение удельных теплоёмкостей:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2} = \frac{c_{p_1} m_1 + c_{p_2} m_2}{c_{v_1} m_1 + c_{v_2} m_2}.$$

Подставляя выражение для удельных теплоёмкостей, получим:

$$\gamma = \frac{\left(i_1 + 2\right)\dfrac{Rm_1}{M_1} + \left(i_2 + 2\right)\dfrac{Rm_2}{M_2}}{i_1 \dfrac{m_1}{M_1} + i_2 \dfrac{m_2}{M_2}} = 1,55 \cdot$$

Пример 3. Кислород массой m =2*кг* занимает объём V_1=1*м*^{3} и находится под давлением P_1 = 0,2 *МПа*. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объёма V_2 = 3 *м*^{3}, а затем при постоянном объёме до давления P_3 = 0,5 *МПа*. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершённую им работу и теплоту Q, переданную газу. Построить график процесса.

Решение

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = c_V m \Delta T = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{M} m \Delta T \ , \qquad (1)$$

где i – число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода i =5); $\Delta T = T_3 - T_1$ - разность температур газа в конечном (третьем) и начальном состояниях.
Начальную и конечную температуру газа найдём из уравнения Менделеева – Клапейрона $PV = \frac{m}{M} RT$, откуда

$$T_1 = {}^{P_1 V_1 M}\!\big/_{mR}, \qquad T_2 = {}^{P_1 V_2 M}\!\big/_{mR}, \qquad T_3 = {}^{P_3 V_2 M}\!\big/_{mR}.$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A_1 = \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) \,.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме равна нулю:

$$A_2 = 0.$$

Следовательно полная работа , совершаемая газом равна

$$A = A_1 + A_2 = A_1.$$

Согласно первому началу термодинамики, теплота Q передаваемая газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы А:

$$Q = \Delta U + A.$$

Произведём вычисления, учтя, что для кислорода M=32·10^{-3}*кг/моль*, получим

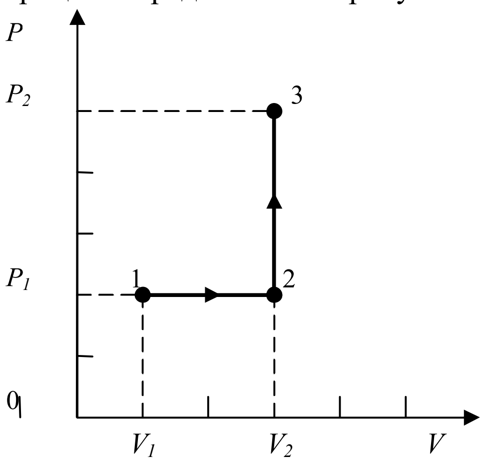
$$T_1 = 385K \,; \qquad T_2 = 1155K \,; \qquad T_3 = 2887K \,.$$

$$A = A_1 = 0,4 МДж \,;$$

$$\Delta U = 3,24 МДж;$$

$$Q = 3,64 МДж.$$

График процесса представлен на рисунке.



▼

Пример 4. В цилиндре под поршнем находится водород массой m = 0,02 *кг* при температуре T_1 = 300*К*. Водород сначала расширялся адиабатно, увеличив свой объём в n_1=5 раз, а затем был сжат изотермически, причём объём газа уменьшился в n_2 =5 раз. Найти температуру в конце адиабатического расширения и работу, совершаемую газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

Решение

Температуры и объёмы газа, совершающего адиабатный процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}, \ \text{или} \ \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

где γ – отношение теплоёмкостей газа при постоянном давлении и постоянном объёме; $n_1 = V_2/V_1$.

Отсюда получаем следующее выражение для конечной температуры

$$T_2 = T_1 \big/ n_1^{\gamma-1} .$$

Работа газа при адиабатном расширении может быть определена по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R\left(T_1 - T_2\right),$$

где C_V – молярная теплоёмкость газа при постоянном объёме.

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде

$$A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}, \quad \text{или} \quad A_2 = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{1}{n_2},$$

где $n_2 = V_2/V_3$.

Произведём вычисления, учитывая что для водорода как двухатомного газа γ=1,4, i=5 и M=$2\cdot10^{-3}$*кг/моль*, получим

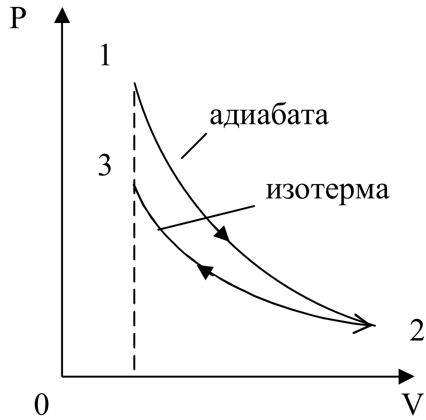
$$T_2 = 300 \Big/ 5^{1,4-1} = \frac{300}{5^{0,4}} K.$$

Так как $5^{0,4}$=1,91 (находится логарифмированием), то

$$T_2 = \frac{300}{1,91} K = 157 K.$$

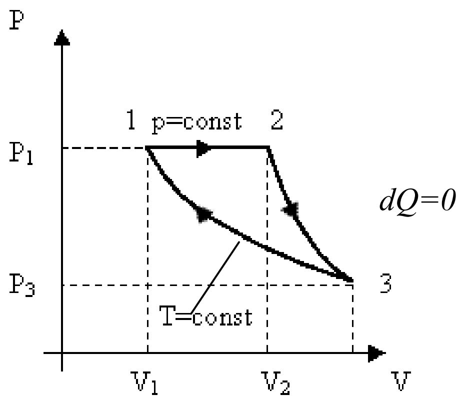
Тогда $A_1 = 29,8 кДж$; $A_2 = -21 кДж$.

Знак минус показывает, что при сжатии работа газа совершается над внешними силами. График процесса представлен на рисунке.



Пример 5. Вычислить КПД цикла, состоящего из изобарного, адиабатного и изотермического процессов, если в результате изобарного процесса газ нагревается от T_1=300 K до T_2=600 K.

Решение



В процессе изобарного нагревания 1-2 газ расширяется за счёт поступившего от нагревателя количества тепла Q_{12}, в процессе адиабатного расширения 2-3 $dQ=0$, в процессе изотермического сжатия газ отдаёт количество теплоты Q_{31} холодильнику. КПД цикла определяется выражением

$$\eta = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}}.$$

$$Q_{12} = \nu \cdot c_p R\left(T_2 - T_1\right) = \nu \cdot \frac{i+2}{2} R\left(T_2 - T_1\right).$$

Первый закон термодинамики для процесса 3-1 имеет вид: $Q_{31} = A$. Так как работа при изотермическом процессе равна

$A = \nu \cdot RT_1 \ln\dfrac{V_3}{V_1}$, то $Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\dfrac{V_3}{V_1}$. Объём газа в состоянии

1 найдём из уравнения изобары $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$; $V_1 = \dfrac{V_2 T_1}{T_2}$.

Тогда $$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\frac{V_3 T_2}{V_2 T_1}.$$

Отношение объёмов $\dfrac{V_3}{V_2}$ найдём из уравнения адиабаты

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \;;\; \frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Следовательно,

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\left[\frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]$$

и с учётом того, что $T_3 = T_1$, получим

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \ln\left[\frac{T_2}{T_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = \nu \cdot RT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \nu \cdot RT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Так как $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$, то $\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{i+2}{2}$.

$$Q_{31} = \nu \cdot RT_1 \frac{i+2}{2} \ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\eta = \frac{T_2 - T_1 - T_1 \ln\frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} \approx 0{,}307.$$

Пример 6. Найти изменение энтропии при следующих процессах:

а) при нагревании 100 *г* воды от 0^{O} С до 100^{O} *С* и последующим превращении воды в пар той же температуры;

б) при изотермическом расширении 10 *г* кислорода от объёма 25 *л* до объёма 100 *л.*

Решение

а) Полное изменение энтропии ΔS равно сумме изменения энтропии при нагревании воды ΔS_1 и изменения энтропии при превращении воды в пар ΔS_2:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2.$$

Пользуясь определением изменения энтропии, найдём:

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mcdT}{T} = mc \ln\frac{T_2}{T_1};$$

$$\Delta S_2 = \frac{1}{T_2}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T_2},$$

где $Q = rm$ - количество теплоты, переданное при превращении нагретой воды в пар той же температуры, r – удельная теплота парообразования.

$$\Delta S_2 = \frac{rm}{T_2},$$

Тогда

$$\Delta S = mc \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{rm}{T_2} = 737 \frac{Дж}{К}.$$

б) при изотермическом процессе температура остаётся постоянной, поэтому $\frac{1}{T}$ можно вынести за знак интеграла:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}.$$

Согласно первого начала термодинамики

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} = 3,6 \frac{Дж}{К}.$$